Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр Ю99-11-01

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	10	13	13	10	9	7	10	15	87

Вариант 2

В-2

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Шифр Ю99-11-01

Задание 1: $3b > 9a + c > 0$ Всё больше нуля => можем возвести в квадрат.

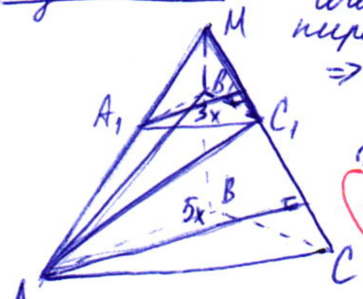
$9b^2 > 81a^2 + c^2 + 18ac \mid : 9 > 0$ => можно ; $b^2 > 9a^2 + \frac{c^2}{9} + 2ac \Leftrightarrow$

$\Rightarrow b^2 > (3a + \frac{c}{3})^2$. Если докажем, что $(3a+\frac{c}{3})^2 \geq 4ac$, то докажем и $b^2 > 4ac$

$(3a+\frac{c}{3})^2 - 4ac \geq 0$; $9a^2 - 2ac + \frac{c^2}{9} \geq 0 \Leftrightarrow (3a - \frac{c}{3})^2 \geq 0$ всегда выполняется, т.к. любое число в квадрате $\geq 0 \Rightarrow b^2 > 4ac \Rightarrow$ чтд.

+

Задание 3:



Сечение, параллельное основанию отсекает от исходной пирамиды подобную. Т.е. $MA_1B_1C_1 \sim MABC$ и $\frac{V_{MA_1B_1C_1}}{V_{MABC}} = k^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{81}{375} = k^3 \Rightarrow k = \frac{3}{5}$ - коэф. подобия, т.е. $\frac{MC_1}{MC} = \frac{MB_1}{MB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{3}{5}$; т.е. $\Delta MB_1C_1 \sim \Delta MBC \Rightarrow \frac{S_{MB_1C_1}}{S_{MBC}} = k^2 = \frac{9}{25}$.

$MA_1B_1C \sim MABC \Rightarrow$ все соответств. части пропорциональны. $\Rightarrow$

+

$\Rightarrow \frac{A_1H_1}{AH_2} = \frac{3}{5}$; $V_{MABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{MBC} \cdot AH_2 \Leftrightarrow 375 = \frac{1}{3} S_{MBC} \cdot 5x$; $x = \frac{3 \cdot 375}{5 \cdot S_{MBC}}$

$V_{\text{искомой пирамиды } MAB_1C_1} = \frac{1}{3} S_{MB_1C_1} \cdot AH_2 = \frac{1}{3} \cdot S_{MB_1C_1} \cdot 5x = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot \frac{3 \cdot 375}{5} \cdot \frac{S_{MB_1C}}{S_{MBC}} =$

$= \frac{375 \cdot 9}{25} = 135$ Ответ: 135

Задание 2:
$$\oplus \begin{cases} \sin^3 x + \sin^4 y = 1 \\ \cos^3 x + \cos^5 y = 1 \end{cases} \Rightarrow (\sin^3 x + \cos^3 x) + (\sin^4 y + \cos^5 y) = 2$$

$\boxed{\text{I}}$ x и y - такие, что их cos и sin $\neq 0$ или 1. Тогда значения синуса и косинуса по модулю:

$0 < |\sin x| < 1$
$0 < |\cos x| < 1$
$0 < |\sin y| < 1$
$0 < |\cos y| < 1$.

Но при возведении в 3, 4, 5 степени числа $\in (0;1)$ уменьшаются $\Rightarrow$ $\Rightarrow \sin^3 x < \sin^2 x$; $\cos^3 x < \cos^2 x$ и т.д. Следовательно: $\sin^3 x + \cos^3 x < \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} \Rightarrow$ первая скобка < 1

По аналогии: $\sin^4 y < \sin^2 y$ и $\cos^5 y < \cos^2 y \Rightarrow$ $\Rightarrow \sin^4 y + \cos^5 y < \underbrace{\sin^2 y + \cos^2 y}_{1} \Rightarrow$ и вторая скобка < 1. Но тогда левая часть $< 2 \Rightarrow$ не выполнено равенство

$\boxed{\text{II}}$ подходят иксы, которые: $\left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \Rightarrow \cos x = 0 \\ \cos x = 1 \Rightarrow \sin x = 0 \end{array}\right.$ по ОТТ

+

и подходят игреки: $\left[\begin{array}{l} \cos(y) = 1 \Rightarrow \sin y = 0 \\ \left[\begin{array}{l} \sin y = 1 \\ \sin y = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \cos y = 0 \end{array}\right.$ (минус „съедается" чётной степенью)

Тогда два из четырёх слагаемых будут равны 1, а два других 0 и выполняется равенство

Ответ: $x = \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ 2\pi k \end{array}\right.$ $y = \left[\begin{array}{l} 2\pi m \\ \frac{\pi}{2} + \pi R \end{array}\right.$; $k, m, n, R \in \mathbb{Z}$

Задание 4: Заметим, что в начале значение многочлена при $x = 1$, т.е. $P(1) = 3 > 0$, а в конце $P(1) = -199 < 0$

Одним ходом мы можем увеличить/уменьшить значение строго на 1. Раз произошла смена знака $\Rightarrow$ в процессе преобразований многочлен принимал значение 0, тогда, раз он квадратный, то либо он имел 1 корень, и это была единица, либо был второй корень, кроме единицы чего?

$1 \in \mathbb{Z}$, либо был второй корень, кроме единицы трёхчлен приведённый $\Rightarrow$ по т. Виета второй корень тоже целый, т.к. коэффициенты b и c строго целые $\Rightarrow$

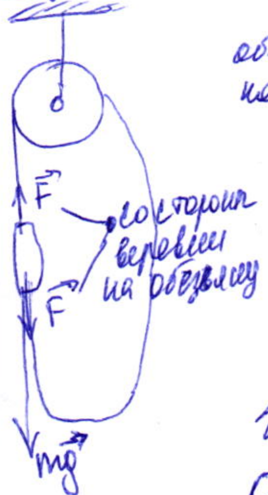
±

$\Rightarrow$ ч.т.д.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Шифр 1099-11-01

Задание 5:



т.к. обезьяна находится на постоянной высоте => относительно земли она покоится => по II з.Н.: $mg+F=0$; по III з.Н.: $-F=mg$ — действие обезьяны на веревку. Все точки веревки будут двигаться с одинаковой скоростью, которая будет изменяться с течением времени. Найдем её через мощность и E кин: ($E_{пот}=0$, т.к. $h=const$)

$P_1 = \frac{\Delta E_{кин}}{\Delta t}$; $E_{кин} = \frac{Mv^2}{2} \Rightarrow P_1 = Mv\cdot\frac{\Delta v}{\Delta t}$

Мощность обезьяны $= P_2 = mgv$, тогда: $P_1 = P_2 \Rightarrow mgv = Mv\cdot\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{mg}{M}$; во время начала, т.е. $t=0$: $v=0 \Rightarrow$ при $t>0$

$v = \frac{mgt}{M} \Rightarrow P_{обезьян} = P_2 = mgv = \frac{mg\cdot mgt}{M} = \frac{(mg)^2 t}{M} \Rightarrow P(3) = \frac{(20\cdot 10)^2\cdot 3}{8} = 1500$ Вт

Ответ: $\boxed{1500 \text{ Вт}}$

Задание 8:

Дано:
$\nu = 4$ моль
$T = 350$ К
$2V_0 = V_к$
60% диссоц.

$A_г$ — ?

Решение: молекула диссоциирующего на атомы => кол-во в-ва двоится. $\Rightarrow \nu_2 = 1,6\nu_1 = 6,4$ моль; Масса газа и давление в сосуде не изм., поэтому процесс изобарный. По ур-ию Менделеева-Клапейрона: $pV = \nu RT$; $P_1 = P_2$

$\frac{\nu_1 R T_1}{V_1} = \frac{\nu_2 R T_2}{V_2} \Leftrightarrow \frac{4T_1}{V_1} = \frac{6,4T_2}{2V_1}$; $T_2 = \frac{2\cdot 4\cdot T_1}{6,4} = \frac{8\cdot 350}{6,4} = 437,5$ К

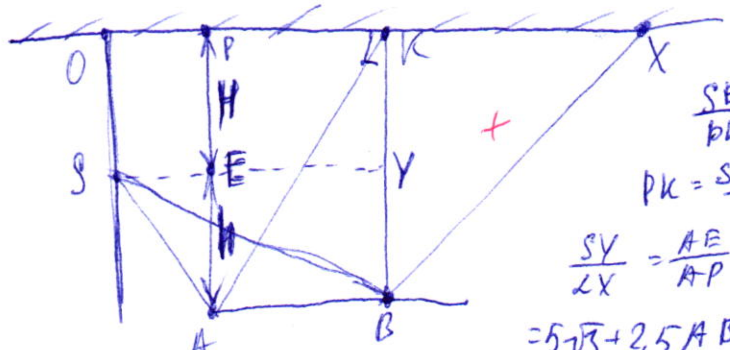
работа газа в изобарном пр-се: $A_г = p(V_2 - V_1)$ или по-другому $A_г = pV_2 - pV_1 = \nu_2 R T_2 - \nu_1 R T_1 =$
$= R(6,4\cdot 437,5 - 4\cdot 350) = 8,31\cdot 1400 = 11634$ Дж; Ответ: 11634 Дж +

Задание 7: действующее напряжение:

$U_д = \sqrt{\frac{\int u^2(t)dt}{T}} = \sqrt{\frac{\int_0^{t_0} 50^2 dt + \int_{t_0}^{2t_0} 100^2 dt + \int_{2t_0}^{3t_0} 50^2 dt + \int_{3t_0}^{4t_0} 50^2 dt}{4t_0}}$

$U_д = \sqrt{\frac{2500t_0 + 10000t_0 + 2500t_0 + 2500t_0}{4t_0}} = \sqrt{\frac{17500}{4}} = 66,144$ В +

Задание 8:



Определим размеры зайчика в начальный момент времени. Найдем координаты точек K и X. Из подобия треуг-ов SEA и APK:

$\frac{SE}{PK} = \frac{AE}{AP}$; $SE = \sqrt{SA^2 - EA^2} = h\sqrt{3}$

$PK = \frac{SE(H+h)}{h} = 2,5SE = 5\sqrt{3}$; $OK = 5\sqrt{3} + h\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

$\frac{SY}{LX} = \frac{AE}{AP}$; $SY = SE + AB = h\sqrt{3} + AB$; $LX = \frac{SY(H+h)}{h} = 2,5(h\sqrt{3} + AB) =$
$= 5\sqrt{3} + 2,5AB$; $OX = 2\sqrt{3} + AB + 5\sqrt{3} + 2,5AB = 7\sqrt{3} + 3,5AB$

Начальные размеры: $OX - OK = 3,5AB$. Спустя 4 сек: $SE' = 2\sqrt{3} + 6$; $PK' = 2,5SE = 5\sqrt{3} + 15$

$SY' = SE' + AB = 2\sqrt{3} + 6 + AB$; $LX' = \frac{SY'(H+h)}{h} = 2,5(2\sqrt{3} + 6 + AB) = 5\sqrt{3} + 2,5AB + 15$

$OX' = 2\sqrt{3} + 6 + AB + 5\sqrt{3} + 2,5AB + 15 = 7\sqrt{3} + 3,5AB + 21$.

Конечные размеры: $OX' - OK' = 6 + 3,5AB$

Изменение размеров: ~~[illegible]~~ $\frac{6+3,5AB}{3,5AB}$. Пусть $AB = 1$, тогда

$\frac{9,5}{3,5} = 2,714$ раз

Ответ: 2,714