Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 52-10-2

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	11	12	6	0	15	10	7	13	74б

Вариант 1

№1.

Пусть эти числа — $n, n+1, n+2, n+3$. Тогда возможными разбиениями на две группы могут быть $\{n+3, n+2\}$ и $\{n+1, n\}$; $\{n+3, n+1\}$ и $\{n+2, n\}$; $\{n+1, n+2\}$ и $\{n, n+3\}$. Посчитаем их разности произведений:

1) $(n+3)(n+2) - n(n+1) = n^2+5n+6-n^2-n = 4n+6 = 2022 \Rightarrow n = 504$

2) $(n+3)(n+1) - n(n+2) = n^2+4n+3-n^2-2n = 2n+3$ не может быть равна 2022, т.к. число $2022-3=2019$ нечётное, хотя должно быть равно $2n$.

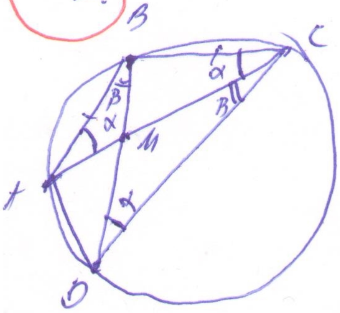
$(n+1)(n+2) - n(n+3) = n^2+3n+2-n^2-3n = 2 \neq 2022$.

Таким образом, получаем, что $n = 504$.

Ответ: ~~n = 504~~. 504, 505, 506, 507

11

№2.



Пусть $\angle BCA = \alpha$, $\angle ACD = \beta$. Тогда, т.к. $AB = BC$, $\triangle ABC$ — равнобедренный и $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$. Также, из вписанности четырехугольника $ABCD$, $\angle ABD = \angle ACD = \beta$, т.к. они опираются на одну дугу. $\angle BCD = 30° = \alpha + \beta$.

~~$\angle ABM$~~ $\angle AMB = 180° - \angle ABD - \angle BAC = 180° - \beta - \alpha = 150°$.

Тогда, из теоремы синусов для $\triangle ABM$:

$2R = \dfrac{AB}{\sin\angle AMB}$, где R — радиус описанной окружности, то есть

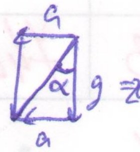
$R = \dfrac{AB}{2\sin\angle AMB} = \dfrac{5}{2\sin 150°} = \dfrac{5}{2\cdot\frac{1}{2}} = 5.$

Ответ: 5.

12

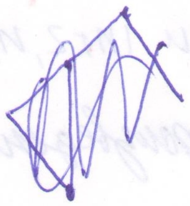
№5

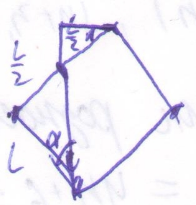
Перейдём в систему отсчёта, ~~двух~~ двигающуюся горизонтально с ускорением a. Тогда можно считать, ~~что на воду действует сила равная векторной~~ что на воду действует ускорение $-\vec{a}+\vec{g}$, ~~то есть~~ пусть в этом векторном треугольнике будет угол α.



Из условия, $g = 2a$. ~~Заметим, что в этом случае, давление считается по~~

Наклоним куб так, чтобы это ускорение было направлено горизонтально вниз. В этом случае, заметим, что давление считается по той же формуле, $P = \rho g h$, но вместо g, тут $A = \sqrt{g^2+a^2} = a\sqrt{5}$.





Минимальное давление будет в самой верхней точке наклонённого куба, таким образом, ~~до~~ к давлению воды будет прибавляться еще $p = 1000$ Па - давление в верхней точке. Наибольшее давление, очевидно будет в самой нижней точке наклонённого куба.

$P = p + \rho A H$, где H - высота верхней точки относительно нижней.

~~$H = \frac{L}{\cos\alpha} + \frac{L}{2}\cos\alpha$, из рисунка. $\cos\alpha = \frac{2a}{\sqrt{5}a} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.~~

~~$H = \frac{2L}{\sqrt{5}} + \frac{L}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3L}{\sqrt{5}}$~~

$H = \frac{L}{2}\cdot\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{L}{2}\cdot\sin\alpha$, где $\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{5}a} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$H = \frac{L}{2}\left(\sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{L}{2}\cdot\frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{10\cdot 6}{2\cdot\sqrt{5}} = 6\sqrt{5}$ см $= 6\sqrt{5}\cdot 10^{-2}$ м.

$P = 1000 + 1000\cdot 5\cdot\sqrt{5}\cdot 6\sqrt{5}\cdot 10^{-2} = 1000 + 10\cdot 150 = 2500$ Па

Ответ: 2500 Па.

15б

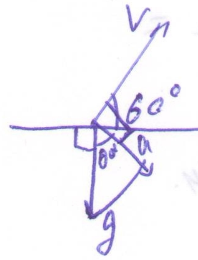
Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 52-10-2

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

№6



Т.к. парабола симметрична, то радиус кривизны траектории в конечной точке полёта равен радиусу кривизны в начале полета.

$\frac{V^2}{R} = a$, где R – радиус кривизны, a – перпендикулярная к скорости составляющая ускорения.

$a = g \cdot \cos 60° = \frac{g}{2}$ (из рисунка)

Тогда $R = \frac{V^2}{a} = \frac{2V^2}{g} = \frac{2 \cdot 10^2}{10} = 20$ м

Ответ: 20 м.

10б

~~№7.~~

~~Т.к. 5°C сравнительно небольшое изменение температуры, то будем считать, что вода остывала с постоянной мощностью остывания, равной $N = K\Delta T$, где K – коэф. пропорциональности, $\Delta T = 5°C$ – изменение температуры. Тогда $N \cdot \Delta t = V\rho c \cdot \Delta T \Rightarrow K\Delta T \cdot \Delta t = V\rho c \cdot \Delta T \Rightarrow K = \frac{V\rho c}{\Delta t}$, где V – объём чайника, $\Delta t = 2$ минуты – время остывания. Будем также считать, что и нагревание чайника с постоянной мощностью теплоотдачи в окружающую среду, равную N.~~

№7.

Т.к. 5°C сравнительно небольшое изменение температуры, то будем считать, что вода остывает с постоянной мощностью теплоотдачи, равной средней, $N = K \cdot (100°C - \Delta T/2 - T_0)$, где K – коэф. пропорциональности, $\Delta T = 5°C$ – изменение температуры, T_0 – температура окр. среды.

Тогда имеем,

$$N\Delta t = V\rho c\Delta T \Rightarrow N = V\rho c\Delta T/\Delta t$$ ~~$\Leftrightarrow \Delta t K(100°C - \frac{\Delta T}{2} - t_0) = V\rho c\Delta T$~~, где Δt ~~-время~~

$\Delta t = 2$ мин $= 120$ сек, - время остывания, V - объём воды.

Пусть t_1 - время за которое ~~остывает~~ вода закипит, тогда

$$P t_1 - N t_1 = V\rho c\Delta T \Leftrightarrow P t_1 - V\rho c\frac{\Delta T}{\Delta t} t_1 = V\rho c\Delta T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{V\rho c\Delta T}{P - V\rho c\frac{\Delta T}{\Delta t}} = \frac{1{,}5\,л \cdot 1\frac{кг}{л}\cdot 4200\frac{Дж}{кг\cdot K}\cdot 5°C}{1500\,Вт - 1{,}5\,л\cdot 1\frac{кг}{л}\cdot 4200\frac{Дж}{кг\cdot K}\cdot\frac{5°C}{120\,с}} =$$

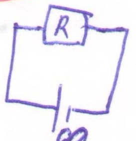
$$= \cancel{\frac{31500\,Дж}{1500\,Вт - 262{,}5\,Вт}} = \cancel{\frac{31500\,Дж}{1237{,}5\,Вт}} = \frac{31500}{1500 - \frac{31500}{120}} =$$

$$= \frac{21}{1 - \frac{21}{120}} = \frac{21\cdot 120}{120 - 21} = \frac{21\cdot 120}{99} = \frac{7}{11}\cdot 120\,с = \frac{7}{11}\,мин.$$

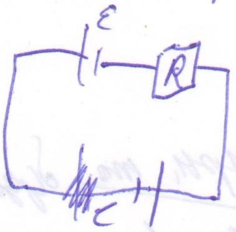
Ответ: $\frac{7}{11}$ мин.

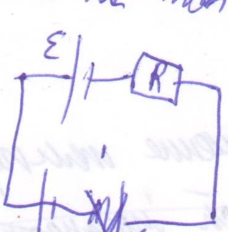
75

№8.



Омметр измеряет сопротивление следующим образом. Он подаёт на нагрузку некое напряжение e, измеряет ток $I = \frac{e}{R}$ и делит напряжение на ток. Тогда у нас есть следующие схемы,





Пусть у батарейки ~~напряжение~~ ЭДС $\mathcal{E}$ и сопротивление R. В одном случае ЭДС омметра и батарейки будут сонаправлены, а в другом противоположны.

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}+e}{R} \qquad I_2 = \frac{\mathcal{E}-e}{R}$$

$$R_1 = \frac{e}{I_1} = \frac{eR}{\mathcal{E}+e} \qquad R_2 = \frac{e}{I_2} = \frac{eR}{\mathcal{E}-e}$$

$$K = \frac{R_1}{R_2} = \frac{\mathcal{E}-e}{\mathcal{E}+e} \Rightarrow K\mathcal{E} + Ke = \mathcal{E} - e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = e\cdot\frac{K+1}{1-K}$$

$$R_1 = \frac{eR}{e\cdot\frac{K+1}{1-K} + e} = \frac{R}{\frac{K+1}{1-K}+1} =$$

$$= \frac{R(1-K)}{K+1+1-K} = R\cdot\frac{1-K}{2} \Rightarrow R = R_1\cdot\frac{2}{1-K} = R_1\cdot\frac{2}{1-\frac{R_1}{R_2}} = \frac{2R_1R_2}{R_2-R_1} =$$

$$= \frac{2\cdot 12\cdot 20}{20-12} = 60\ Ом$$

Ответ: 60 Ом.

13б

II случай

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 52-10-2

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

№3

Ответ: $p=2$; ~~$n=2$, $n=-3$; $n=-1$~~ $n \in \{-3, -1, 1\}$

Решение: Пусть $p=2$??, тогда наше выражение равно $\frac{n^3-2n+1}{n^2+2n+2}$. Поделим многочлены.

$$\begin{array}{r|l} n^3 - 2n + 1 & n^2+2n+2 \\ -\ (n^3 + 2n^2 + 2n) & n-2 \\ \hline -2n^2 - 4n + 1 & \\ -\ (-2n^2 - 4n - 4) & \\ \hline 5 & \end{array}$$

то есть $\frac{n^2-2n+1}{n^2+2n+2} = n-2 + \frac{5}{n^2+2n+2}$

Тогда n^2+2n+2 ~~равно~~ либо 1, либо -1, либо 5, либо -5. Подберём n, получим, что n может быть равно -3, -1, 1.

6

№4.

~~Разложим это выражение по биному Ньютона и отбросим все слагаемые, в которых $\sqrt{65}$ входит в четной степени, то есть которые являются целыми и никак не влияют на цифры после запятой.~~

~~Получим число $a=\sqrt{65}\left(C_{2022}^{1}\cdot 8^{2021}+C_{2022}^{3}\cdot 8^{2019}\cdot 65+\dots+C_{2022}^{2021}\cdot 8\cdot 65^{1010}\right)$~~

~~Таким образом, нам нужно доказать, что~~

~~$[a\cdot 10^{2426}]-[a]\cdot 10^{2426}=\underbrace{99\ldots 99}_{2426\ \text{девяток}}$, где [ ] — целая часть числа.~~

$$(8+\sqrt{65})^{2022}=\left(8\left(1+\sqrt{\frac{64}{64}+\frac{1}{64}}\right)\right)^{2022}=8^{2022}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{64}}\right)^{2022}$$

0