1

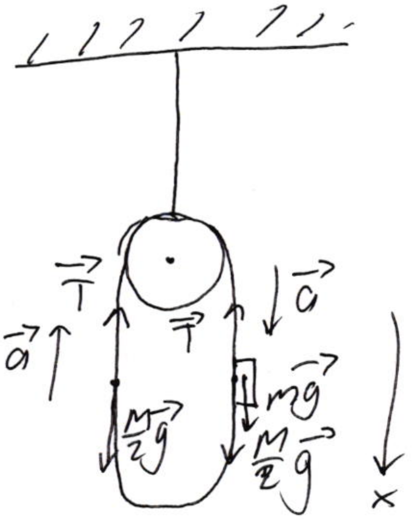
Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр ТПО-11-04

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	10	3	13	12	10	15	10	15	88

Вариант 1

№5



По II закону Ньютона для середины правой части верёвки, по которой карабкается обезьяна:

$\frac{M}{2}\vec{g} + m\vec{g} + \vec{T} = \frac{M}{2}\vec{a}$

$Ox: \frac{Mg}{2} + mg - T = \frac{Ma}{2}$. (1)

Для левой части верёвки:

~~Ox~~ $\cancel{\frac{Mg}{2} - T}$ $Ox: \frac{Mg}{2} - T = -\frac{Ma}{2}$. (2)

(1),(2) => (1)−(2) $mg = Ma$, $a = \frac{m}{M}g$. (3)

т.к. в начале верёвка находилась в покое, то после того, как обезьяна начала карабкаться скорость верёвки будет равна $v = at$. (4)

Мощность, развив-ая обезьяной: $N = Fv$. (5)

(3),(4),(5) => $N = F \cdot \frac{m}{M} g t$, $F = mg$, => $N = \frac{(mg)^2}{M} t$.

$N = \frac{(30 \cdot 10)^2}{5} \cdot 2 = 36000$ (Вт)

Ответ: 36000 Вт.

+

№8

Дано:
$\nu_1 = 2$ моль,
$T_1 = 300K$,
$V_2 = 3V_1$.
$\alpha = 40\%$.
A − ?

+

Решение:

т.к. в процессе нагревания дис-ло 40% молекул, то $\nu_2 = \nu_1 \cdot (1 + \frac{\alpha}{100}) = 1{,}4\nu_1 = 2{,}8$ моль.

Т.к. нагревание происходит в сосуде под поршнем, то $p = const$ ~~=> по закону Гей-Люссака~~: $\cancel{\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}}$: по ур-ию Менделеева-Клапейрона:

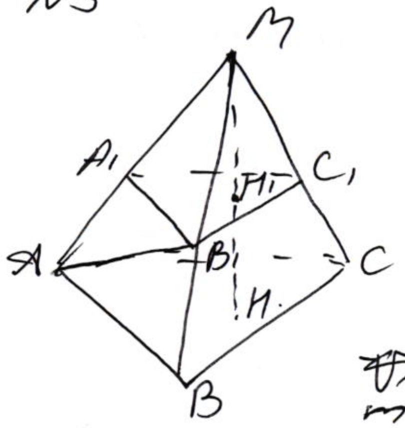
$\frac{\nu_1 R T_1}{V_1} = \frac{\nu_2 R T_2}{V_2}$ => $T_2 = \frac{V_2 \nu_1 T_1}{V_1 \nu_2} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 300}{2{,}8} = 643K$.

Т.к. $p = const$: $A = p\Delta V = pV_2 - pV_1 = \nu_2 R T_2 - \nu_1 R T_1 =$

$=(2\cdot 8{,}31\cdot 643)-(2\cdot 8{,}31\cdot 300)=9975$ (Дж)

Ответ: 9975 Дж.

№3



Опустим $MH\perp(ABC)$, т.к. $(ABC)\parallel(A_1B_1C_1)\Rightarrow$ $MH\perp(A_1B_1C_1)$. $MH\cap(A_1B_1C_1)=H_1$.

$V_{MA_1B_1C_1}=\frac{1}{3}S_{A_1B_1C_1}\cdot MH_1$

$V_{MABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot MH$.

Пирамиды MABC и $MA_1B_1C_1$ — подобны, ~~т.к. B_1C_1~~ => их объемы относятся как куб коэф-та подобия: $\frac{V_{MA_1B_1C_1}}{V_{MABC}}=k^3\Rightarrow$

$k^3=\sqrt[3]{\frac{96}{324}}=\frac{2}{3}\Rightarrow$ $\frac{MH_1}{MH}=\frac{2}{3}\Rightarrow$ пусть $MH_1=2x$

тогда $MH=3x\Rightarrow HH_1=x$.

$V_{MAB_1C_1}=V_{MA_1B_1C_1}+V_{AB_1C_1A_1}$; $V_{AB_1C_1A_1}=\frac{1}{3}h\cdot S_{A_1B_1C_1}=$
$=\frac{1}{3}HH_1\cdot S_{A_1B_1C_1}\Rightarrow V_{MAB_1C_1}=\frac{1}{3}S_{A_1B_1C_1}\cdot 2x+\frac{1}{3}S_{A_1B_1C_1}\cdot x=$
$=\frac{1}{3}\cdot 3x\cdot S_{A_1B_1C_1}=x\cdot S_{A_1B_1C_1}$ (1)

$V_{MA_1B_1C_1}=\frac{1}{3}S_{A_1B_1C_1}\cdot 2x\Rightarrow x=\frac{3V_{MA_1B_1C_1}}{2S_{A_1B_1C_1}}=\frac{144}{S_{A_1B_1C_1}}$ (2)

(1),(2) => $V_{MAB_1C_1}=\frac{144}{S_{A_1B_1C_1}}\cdot S_{A_1B_1C_1}=144$.

Ответ: 144.

~~№4~~

$x^2+20x+22\to x^2+202x+2$ (ax^2+by+c)

Т.к. число операций не ограничено, то среди полученных кв. трехчленов мы могли получить любой кв. трехчлен, коэф-ент перед старшим членом которого равен 1. => Мы могли получить кв. трехчлен вида x^2-5x+6, корни которого $x=2;3$ — целые числа. Из-за неограниченности операций мы могли получить любой кв. трехчлен с $a=1$.

~~Ответ:~~

Рассмотрим случай, когда до получения конечного кв. трехчлена оставалось одно действие:

$x^2+203x+2$, $x^2+202x+1$, $x^2+201x+2$, $x^2+202x+3$.

~~Решая~~ Находя эти корни, мы не получаем целых

2

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Шифр ТПО-11-04

ВАРИАНТ 1

№1 $2b > 4a + c > 0$ Доказать, что $b^2 > 4ac$

Рассмотрим $g(x) = ax^2 + bx + c$

$g(-2) = 4a + c - b \cdot 2 < 0$ – из условия

$g\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right) = -c + b\sqrt{-\frac{c}{a}} + c = b\sqrt{-\frac{c}{a}} > 0$, т.к. $b > 0$ из условия, $\sqrt{-\frac{c}{a}} > 0$ в данных условиях

$\Downarrow$

функция принимает значения разных знаков на концах отрезка $[-2; \sqrt{-\frac{c}{a}}]$. Значит, его дискриминант положителен, т.е. $b^2 > 4ac$, ч.т.д.

Ответ: ч.т.д.

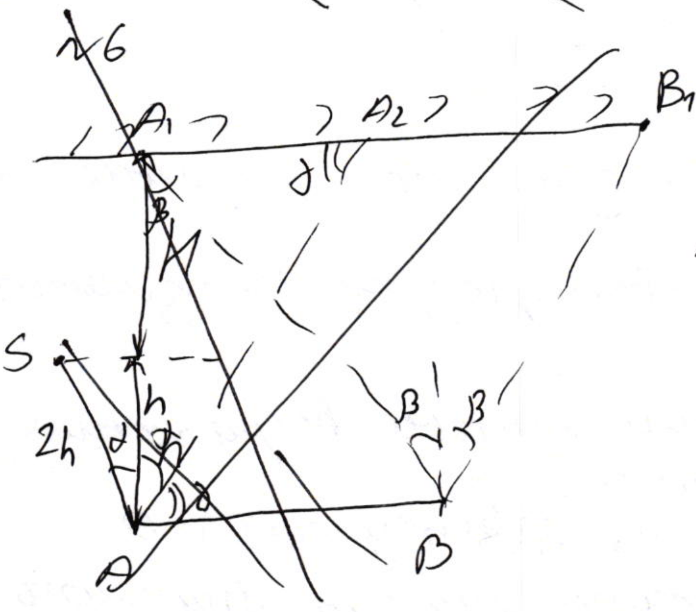
№7

Из графика видно, что $U_{max} = 10B$. =>

$U_g = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7{,}1\ B.$

Ответ: 7,1 В.

№6



$tg\alpha = \frac{\sqrt{3}h}{h} = \sqrt{3}$ =>

$A_1A_2 = tg\alpha \cdot (H + h) = 3\sqrt{3}$ м.

№1

$2b > 4a + c > 0$. Т.к. $2b > 0$, $4a + c > 0$, то $4b^2 > 16a^2 + 8ac + c^2$ => $b^2 > 4a^2 + 2ac + \frac{c^2}{4}$.

Т.к. $(2a - \frac{c}{2})^2 \geq 0$ => $4a^2 + \frac{c^2}{4} \geq 2ac$ => $4a^2 + 2ac + \frac{c^2}{4} \geq 4ac$

$b^2 > 4a^2 + 2ac + \frac{c^2}{4} \geq 4ac$ => $b^2 > 4ac$, ч.т.д.

Ответ: ч.т.д.

+

№7.

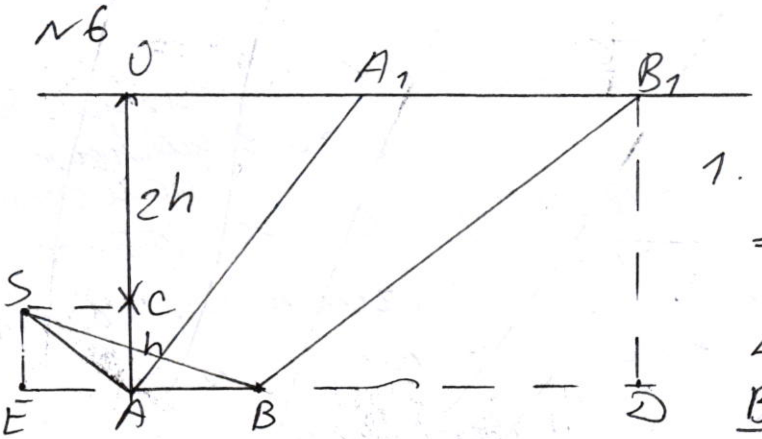
Мощность постоянного тока: $P=\frac{U^2}{R}$.

Для переменного тока: $\overline{P}=\frac{\overline{U^2}}{R}$, т.е. мощность тока определяется средним квадратом напряжения. $U_g=\sqrt{\overline{U^2}}$ $\overline{U^2}=\frac{10^2t_0+5^2t_0+0\cdot t_0+(-5)^2t_0}{4t_0}=\frac{150}{4}(B^2)$

$U_g=\sqrt{\overline{U^2}}=\sqrt{\frac{150}{4}}=6,1\,(B)$

Ответ: $U_g=6,1$ В.

№6



A_1B_1 — зайчик на стене

1. В начале: $\triangle SCA \sim \triangle A_1OA$

$\Rightarrow \frac{OA_1}{SC}=\frac{H+h}{h}$; $OA_1=3\sqrt{3}$ (м.)

$\triangle SBE \sim \triangle BDB_1 \Rightarrow$

$\frac{BD}{BE}=\frac{B_1D}{SE} \Rightarrow BD=3(\sqrt{3}+AB)$

$A_1B_1=AD-OA_1=AB+BD-OA_1=\underline{4AB}$

2. Через $t=5c$. $SC=\sqrt{4h^2-h^2}+\upsilon t=10+\sqrt{3}$ (м)

$OA_1=3(10+\sqrt{3})$ м; $BD=3(\sqrt{3}+10+AB)$

$A_1'B_1'$ — зайчик после $t=5c$.

$A_1'B_1'=AB+BD-OA_1=4AB$

$\frac{A_1'B_1'}{A_1B_1}=\frac{4AB}{4AB}=1 \Rightarrow$ размер зайчика не изменится

Ответ: размер не изменится.

№2

$$\begin{cases}\sin^4x+\sin^5y=1\\ \cos^3x+\cos^7y=1\end{cases}$$

Сложим данные выражения и оценим:

$(\sin^4x+\cos^3x)+(\sin^5y+\cos^7y)=2$

Максимальное значение, которое может принимать $(\sin^4x+\cos^3x)=1$, ~~Ано~~ т.е. при любых x $\sin^4x+\cos^3x\le1$. При любом значение y — $(\sin^5y+\cos^7y)\le1$, т.е макс. значение — 1 $\Rightarrow (\sin^4x+\cos^3x)+(\sin^5y+\cos^7y)=2$ в случае, когда $\begin{cases}\sin^4x+\cos^3x=1\\ \sin^5y+\cos^7y=1\end{cases}$ $\Rightarrow$ этой системе удовлетворяют пары чисел

$\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ 2\pi n\right)$, $\left(2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$,

$\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ 2\pi n\right)$, где $k,n\in Z$

③

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр ТПО-11-04

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

№2 (продолжение)

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k; 2\pi n\right), \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k; 2\pi n\right),$
$\left(2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, где $k, n \in \mathbb{Z}$.

№4.

Начальный кв. трёхчлен: $x^2+20x+22$

Конечный кв. трёхчлен: $x^2+202x+2$.

Кв. трёхчлен имеет вид: ax^2+bx+c, т.к. в нашем случае $a=1$, то целые корни будут в случае, когда $b-c=1$. ? Почему? В начале $b-c=-2$, в конце $b-c=200$, т.к. мы можем менять b ~~и~~ или c только на 1, то по дискретной непрерывности, если мы получим из $b-c=-2 \to b-c=200$, ~~то~~ $b-c$ было равно 1. $\Rightarrow$ ~~были целые~~ в процессе был такой кв. трёхчлен, корни которого были целыми, ч.т.д.

Ответ: ~~ч.т.д.~~ верно, в процессе есть такой кв. трёхчлен, у которого целые корни.

±