30-11-18

(значения)

$\ldots + \sin^5 y = 1$ +
$\ldots x + \cos^7 y = 1$

$\ldots + \sin^5 y + \cos^3 x + \cos^7 y = 2$

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \sin^2 y + \cos^2 y = 1 \end{cases} +$$

$\sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 y + \cos^2 y = 2$

~~sin~~ Не учитываем граничные значения 0 и 1!

$$\begin{cases} \sin^4 x < \sin^2 x \\ \sin^5 y < \sin^2 y \\ \cos^3 x < \cos^2 x \\ \cos^7 y < \cos^2 y \end{cases} \Rightarrow \sin^4 x + \sin^5 y + \cos^3 x + \cos^7 y < \sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 y + \cos^2 y$$

т.о. других значений быть не может

№7

Действующее напряжение – такое напряжение, что при том же сопротивлении оно выполняет ту же работу за то время, за которое изменяется напряжение в цикле

$A = IUt = \frac{I^2}{R} t = \frac{U^2}{R}$

$$\frac{U_1^2}{R}\Delta t_1 + \frac{U_2^2}{R}\Delta t_2 + \frac{U_3^2}{R}\Delta t_3 + \frac{U_4^2}{R}\Delta t_4 = \frac{U^2 t}{R}$$

$t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \Delta t_4 =$

$\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3 = \Delta t_4 = t_0$

$= 4t_0$

$$U_1^2 t_0 + U_2^2 t_0 + U_3^2 t_0 + U_4^2 t_0 = U^2 \cdot 4t_0$$

$$U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 = 4U^2$$

$$U = \sqrt{\frac{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2}{4}}$$

$$U = \left(\sqrt{\frac{100 + 25 + 0 + 25}{4}}\right) В =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{150}{4}}\right) В = \left(\frac{5}{2}\sqrt{6}\right) В = (2{,}5\sqrt{6}) В \approx$$

$$\approx (2{,}5 \cdot 2{,}45) В = 6{,}125 В$$

Ответ: 6,125 В

№8 $V_1 = 3V_0$
$\nu = 2$ моль
$T = 300 K$
$\eta = 40\%$
$A - ?$

$pV = \nu RT$

$A_0 = \frac{3}{2}\nu RT = \frac{3}{2} pV = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot 8{,}31 \cdot 300 = 7479$ Дж

~~$A = Q - U$~~

$p_0 V_0 = \nu R T_0$? → $p_0 = p_1$
$p_1 3V_0 = \nu R T_1$ ↘ $V_0 = p_1$, $T_0 < T_1$

$T_1 = 3T_0$

$$A_1 = \frac{3}{2}\nu R T_1 = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot 8{,}31 \cdot 300 \cdot 3 = (7479 \cdot 3) Дж$$

$$\Delta A = A_1 - A_0 = 7479 \cdot 3 - 7479 = 14958 Дж$$

Ответ: 14958 Дж

36-11-18

$(M+m)a = mg$

$a = \frac{mg}{M+m} = \frac{30кг \cdot 10\frac{м}{с^2}}{30кг + 5кг} = \cancel{300}\ 8,57\ \frac{м}{с^2}$

из (*) $P = F \cdot \upsilon$

$\upsilon = \upsilon_0 + at = 0 + 8,57\frac{м}{с^2} \cdot 2 = 17,14\ \frac{м}{с}$

$P = F \cdot \upsilon = ma \cdot \upsilon = 30 кг \cdot 8,57 \frac{м}{с^2} \cdot 17,14 \frac{м}{с} \approx 4406,7$ Вт

Ответ: 4406,7 Вт.

№4

$x^2+20x+22 \longrightarrow x^2+202x+2$

x^2+bx+c — общий вид

Пусть мн-ва B и C – мн-ва промежуточных значений b и c соответственно, выстроенные в порядке прим. действий

Уберем из мн-в B и C все повторяющиеся значения

B – мн-во натуральных чисел [20; 202] в порядке возрастания

C – мн-во нат. чисел [2; 22] в порядке убывания

$b_0 = 20$ $c_0 = 22$

Порядок убывания/возрастания появился, т.к. числа в мн-вах изначально были выстроены в порядке примененных к выражению действий, т.е. есть в мн-ве B числа или от 20 до 202, а в мн-ве C от 22 до 2

из св-в функций знаем, что возрастающая и убывающая функции пересекаются только 1 раз.

Когда применяются действия, только b или c возрастает или уменьшается соотв., т.е. ф-ии b и c неубыв. и невозраст. соотв. (*)

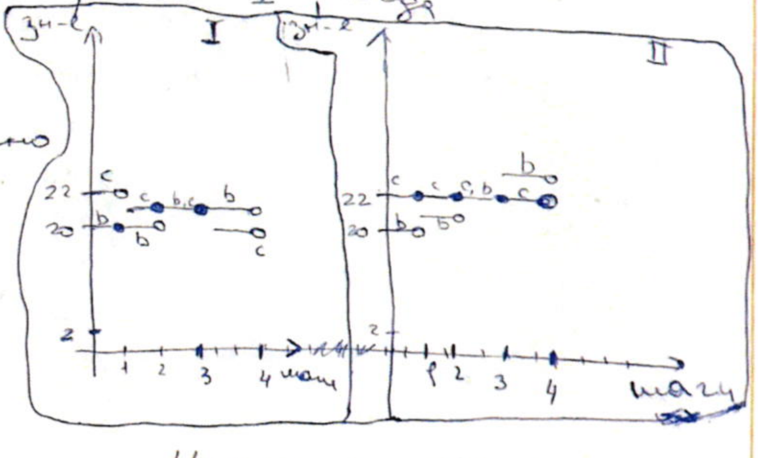
в и с принимают дискретные значения

Знаем, что если $\begin{cases} ax^2+bx+c=0 \\ a-b+c=0 \end{cases}$, то x_1 и x_2 – целые

В данном случае a всегда равно 1, тогда

$1-b+c=0$

$b-c=1$



из (*) знаем, что b и c точно когда-то станут равны, а т.к. при к-м действии b и c приближаются или отдаляются друг к другу на 1, то ~~такое~~ зн-е, удовл. $b-c=1$ точно встретится хотя бы раз

Например:

$x^2+21x+20 = (x+1)(x+20)$ (I)

$x^2+23x+22 = (x+1)(x+22)$ (II)

Недостаточно обосновано, что элементу из B соотв-ет эл-т из C такой, что ур-ие имеет целые корни

36-11-18

6) Размер солнечного зайчика $C'D'$

$C'(4\sqrt{3}+40;3)$ $D'(4\sqrt{3}+4a+40;3)$

т.к ординаты равны, то $C'D' = |4\sqrt{3}+40-4\sqrt{3}-4a-40| = 4a$

найдем отношение $\frac{C'D'}{CD}$

$$\frac{C'D'}{CD} = \frac{4a}{4a} = 1$$

Ответ: 1

№2

$$\begin{cases} \sin^4 x + \sin^5 y = 1 & (*) \\ \cos^3 x + \cos^7 y = 1 & (**) \end{cases}$$

a) 1) Р-м $\sin^4 x$, $\sin^4 x \geq 0$, т.к. четная степень

$\sin^4 x$ определен на $[0;1]$ и огр-е сверху возникло из-за св-в функции $\sin x$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ для получения в сумме с ним 1, $\sin^5 y$ будет ~~определен~~ принадлежать $[0;1]$ $\quad \sin x \in [-1;1]$ $\quad \sin y \in [0;1]$

2) ~~cos~~ $\cos^3 x$ определен на $[-1;1]$, $\cos^7 y$ определен на $[-1;1]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ чтобы из их суммы получить 1, $\cos^3 x$ должен принадлежать отр. $[0;1]$, т.е. $\cos x \in [0;1]$

аналог., $\cos^7 y$, $[0;1]$, $\cos x \in [0;1]$

б) проверим граничные значения

$$\begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin y = 1 \\ \cos x = 0 \\ \cos y = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin y = 1 \\ \cos x = 0 \\ \cos y = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \sin x = \pm 1 \\ \sin y = 0 \\ \cos x = 0 \\ \cos y = 1 \end{cases} \quad \text{т. О}$$

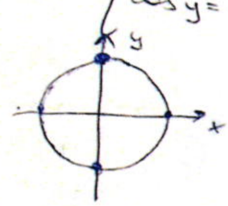
не удовл. начальной системе

$$\begin{cases} \sin x = \pm 1 \\ \sin y = 0 \\ \cos x = 0 \\ \cos y = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin y = 1 \\ \cos x = 1 \\ \cos y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin y = 0 \\ \cos x = 1 \\ \cos y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin y = 1 \\ \cos x = 1 \\ \cos y = 0 \end{cases}$$

не удовл. нач. системе

т. О.



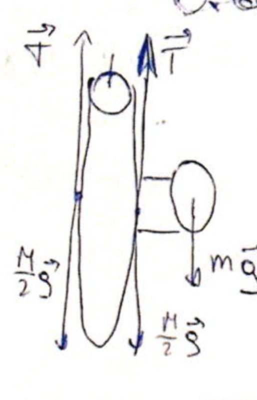
Ответ:
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \\ y = 2\pi k, k \in Z \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2\pi m, m \in Z \\ y = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in Z \end{cases} \end{array}\right.$$

(продолжение на стр. 5)

№5

$t = 2c$
$M = 5$ кг
$m = 30$ кг
$P - ?$

$P = \frac{A}{t} = \frac{F \cdot S}{t} = F \cdot v$ (*)



$$\begin{cases} T - \frac{M}{2}g = \cancel{ma} \frac{M}{2}a \\ \frac{M}{2}g + mg - T = \left(\frac{M}{2}+m\right)a \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = \frac{M}{2}g + \frac{M}{2}a \\ T = \frac{M}{2}g + mg - \frac{M}{2}a - ma \end{cases}$$

$$\frac{M}{2}a = mg - \frac{M}{2}a - ma$$

№6

36-11-18

Рис. 1. До движения

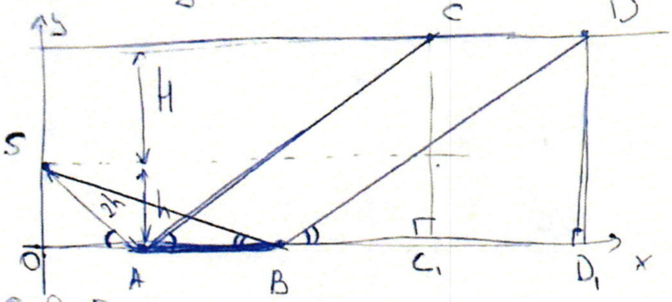
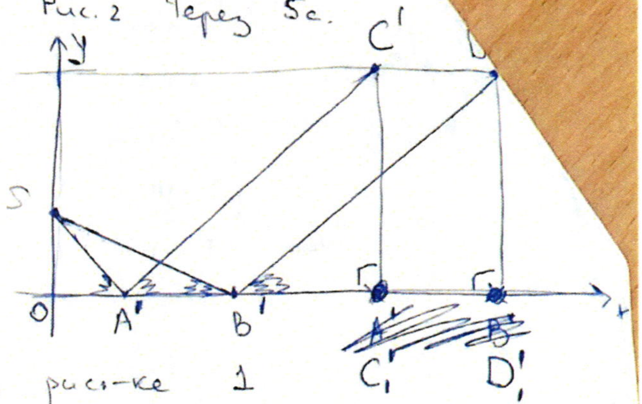


Рис. 2 Через 5с.



Работаем с рис. 1

1) Введем систему координат, как на рис-ке 1

$O(0;0)$ $S(0;1)$ $A(\sqrt{3};0)$

$OA=\sqrt{SA^2-SO^2}=\sqrt{2^2-1}=\sqrt{3}$ из т. Пифагора

Пусть $AB=a$

$B(\sqrt{3}+a;0)$

По закону отражения света, угол падения равен углу отражения (*)

2) Пусть ~~отрезок~~ CD – солнечный зайчик

Найдем координаты C и D $C(c;3)$ $D(d;3)$ c–? d–?

Из (*) знаем, что $\angle SAO=\angle CAB$ и $\angle SBO=\angle(DB;Ox)$

2.1) $\operatorname{tg}\angle SAO=\operatorname{tg}\angle CAB$ Пусть CC_1 и DD_1 – высоты к Ox

$\frac{SO}{OA}=\frac{CC_1}{AC_1}$ $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{3}{AC_1}$ $AC_1=3\sqrt{3}$ $c=OA+AC_1=\sqrt{3}+3\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

2.2) Аналог. 2.1) $\frac{SO}{OB}=\frac{DD_1}{BD_1}$ $\frac{1}{\sqrt{3}+a}=\frac{3}{BD_1}$ $BD_1=3\sqrt{3}+3a$

$d=OB+BD_1=\sqrt{3}+a+3\sqrt{3}+3a=$
$=4\sqrt{3}+4a$

Т.О. $C(4\sqrt{3};3)$ $D(4\sqrt{3}+4a;3)$

3) Найдем размеры солнечного зайчика:

т.к. ординаты равны, то $CD=|4\sqrt{3}+4a-4\sqrt{3}|=4a$ (т.к. a – расстояние, $a>0$)

4) Через 5с. зеркало AB сдвинется вправо на $2\frac{м}{с}\cdot 5с=\underline{10м}$, таким образом ~~новые координаты~~ новые координаты точек A и B будут принадлежать A' и B' (параллельный перенос)

$A'(\sqrt{3}+10;0)$ $B'(\sqrt{3}+a+10;0)$

5) Аналог. работе с рис-ком 1, начнем работу с рис-м 2

C'D' – солнечный зайчик, найдем координаты т-ек C' и D'

$C'(c';3)$ $D'(d';3)$ $C'C_1'$ и $D'D_1'$ – высоты к Ox

5.1) $\operatorname{tg}\angle SA'O=\operatorname{tg}\angle C'A'C_1'$

$\frac{SO}{OA'}=\frac{CC_1'}{A'C_1'}$ $\frac{1}{\sqrt{3}+10}=\frac{3}{A'C_1'}$ $A'C_1'=3\sqrt{3}+30$

$c'=OA'+A'C_1'=\sqrt{3}+10+3\sqrt{3}+30=4\sqrt{3}+40$

5.2) $\operatorname{tg}\angle SB'O=\operatorname{tg}\angle D'B'D_1'$

$\frac{SO}{OB'}=\frac{D'D_1'}{B'D_1'}$ $\frac{1}{\sqrt{3}+a+10}=\frac{3}{B'D_1'}$ $B'D_1'=3\sqrt{3}+3a+30$

$d'=OB'+B'D_1'=\sqrt{3}+a+10+3\sqrt{3}+3a+30=4\sqrt{3}+4a+40$ страница 2

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 36-11-18

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	10	10	13	10	6	15	15	0	79

без изм без изменений

Вариант 1

№1

$2b > 4a + c > 0$

$b > 2a + \frac{c}{2} > 0$

т.к. $b > 0$ и $2a + \frac{c}{2} > 0$, то

$b^2 > (2a + \frac{c}{2})^2$

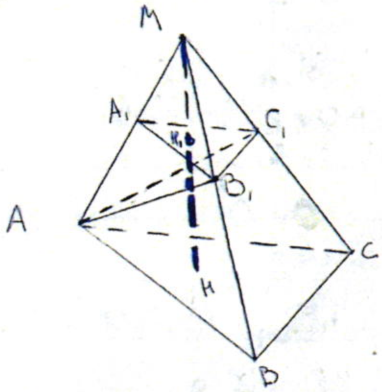
$b^2 > 4a^2 + 2ac + \frac{c^2}{4}$

$b^2 > 4a^2 - 2ac + \frac{c^2}{4} + 4ac$

$b^2 > \underbrace{(2a - \frac{c}{2})^2}_{\geq 0} + 4ac \Rightarrow b^2 > (2a - \frac{c}{2})^2 + 4ac \geq 4ac$

т.о. $b^2 > 4ac$ ■

№3



Дано: Пирамида $MABC$; $(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$

$A_1 \in AM$, $B_1 \in BM$, $C_1 \in CM$

$V_{MABC} = 324$ $\quad V_{MA_1B_1C_1} = 96$

Найти: $V_{MAB_1C_1}$

Решение:

1) Пусть $MH \perp (ABC)$ – высота пир. $MABC$

$MH_1 \perp (A_1B_1C_1)$ – высота пир. $MA_1B_1C_1$

2) т.к. $(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$, то пл-ть $(A_1B_1C_1)$ отсекает подобную пирамиду $MA_1B_1C_1$ от $MABC$

$MA_1B_1C_1 \sim MABC$

$\frac{V_{MA_1B_1C_1}}{V_{MABC}} = k^3 \quad \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = k^2 \quad \frac{MH_1}{MH} = k$ (*)

$k^3 = \frac{96}{324} = \frac{24}{81} = \frac{8}{27} \qquad k = \frac{2}{3}$

3) Р-м $AA_1B_1C_1$ – пирамида

HH_1 – высота $AA_1B_1C_1$, т.к. $\left.\begin{array}{l} MH_1 \perp (A_1B_1C_1) \Rightarrow MH \perp (A_1B_1C_1) \\ MH \perp (ABC) \Rightarrow MH \perp (ABC) \\ HH_1 \subset MH \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} HH_1 \perp (A_1B_1C_1) \\ HH_1 \perp (ABC) \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow HH_1 = d((ABC); (A_1B_1C_1)) = d(A; (A_1B_1C_1))$

$A \in (ABC)$

т.о. $V_{AA_1C_1B_1} = \frac{1}{3} HH_1 \cdot S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{3}(MH - MH_1) S_{A_1B_1C_1} =$

$= \frac{1}{3} MH \cdot S_{A_1B_1C_1} - \underbrace{\frac{1}{3} MH_1 \cdot S_{A_1B_1C_1}}_{V_{MA_1B_1C_1}} = \frac{1}{3} MH \cdot S_{A_1B_1C_1} - 96$ (=)

из (*) $MH = \frac{MH_1}{k} = \frac{3MH_1}{2}$

(=) $\frac{3}{2}\underbrace{\left(\frac{1}{3} MH \cdot S_{A_1B_1C_1}\right)}_{V_{MA_1B_1C_1}} - 96 = \frac{3}{2} \cdot 96 - 96 = \frac{1}{2} \cdot 96 = 48$ $\cancel{8}$

т.о. $V_{MAB_1C_1} = V_{MA_1B_1C_1} + V_{AA_1B_1C_1} = 96 + 48 = 144$

Ответ: 144

СТРАНИЦА