Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 77/6-10-18

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	11	12	2	10	10	10	2	11	68

Вариант 1

№1 Пусть x – первое число, $x \in N$ тогда

$x+1$ – второе число, $x+2$ – третье число, $x+3$ – четвертое число

Рассмотрим все возможные комбинации:

Составим уравнения

1) $x(x+1)+2022=(x+2)(x+3)$

$\cancel{x^2}+x+2022=\cancel{x^2}+5x+6$

$4x-2016=0$

$x=\frac{2016}{4}$

$x=504$

2) $(x+2)(x+3)+2022=x(x+1)$

$\cancel{x^2}+5x+6+2022=\cancel{x^2}+x$

$4x+2028=0$

$x=-\frac{2028}{4}$

$x=-507$ – не удовлетворяет условию, что $x \in N$

3) $x(x+2)+2022=(x+1)(x+3)$

$\cancel{x^2}+2x+2022=\cancel{x^2}+4x+3$

$2x=2019$

$x=1009,5$ – не удовлетворяет условию, что $x \in N$

+

4) $(x+1)(x+3)+2022=x(x+2)$

$\cancel{x^2}+4x+3+2022=\cancel{x^2}+2x$

$2x=-2025$

$x=-1012,5$ – не удовлетворяет условию, что $x \in N$

5) $x(x+3)+2022=(x+1)(x+2)$

$x^2+3x+2022=x^2+3x+2$

$0=-2022$

корней нет

6) $(x+1)(x+2)+2022=x(x+3)$

$\cancel{x^2}+\cancel{3x}+2+2022=\cancel{x^2}+\cancel{3x}$

$2024=0$

корней нет

Значит $x=504$ – первое число, $x+1=505$ – второе число, $x+2=506$ – третье число, $x+3=507$ – четвертое число

$504\cdot505+2022=506\cdot507$

Ответ: 504, 505, 506, 507

№2

Дано:

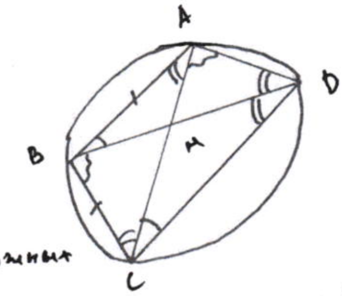
ABCD – четырехугольник

$AB=BC=5$

$\angle BCD=30°$

M – т. пересечения диагоналей ABCD

Найти R – ?



Решение:

1) $\angle BCD=30°$ (по условию)

$\angle BAD=180-\angle BCD=180-30=150°$

(если четырехугольник вписан в окружность, то сумма его противоположных углов равна 180°)

2) $\angle BAC=\angle BDC$ (т.к. опираются на одну дугу окружности)

$\angle ACB=\angle BDA$ (т.к. опираются на одну дугу окружности)

Т.к. $AB=BC$ (по условию), то $\triangle ABC$ – равнобедренный по определению

По свойству р/б треугольника $\angle BCA=\angle BAC$

Значит, $\angle BAC=\angle BDC=\angle ACB=\angle BDA$

3) $\angle DBC=\angle BAC$ (т.к. опираются на одну дугу окружности)

$\angle BAD =$ [illegible]

$\angle AMD = 180 - (\angle CAD + \angle BDA) = 180 - 150 = 30^\circ$

$\angle AMB = 180 - 30 = 150^\circ$ (как смежные углы)

по теореме синусов:

$\frac{AB}{\sin 150} = 2R \qquad 5 \cdot 2 = 2R \qquad R = 5$

+

Ответ: 5

№3

$\frac{n^3 - pn + 1}{n^2 + pn + 2}$ - целое число, если числитель делится на знаменатель

Пусть $n^3 - pn + 1 = 0$, тогда $p = \frac{n^3+1}{n} = n^2 + \frac{1}{n}$

Поскольку $\frac{1}{n}$ должно быть целым числом $n_1 = 1 \quad n_2 = -1$

$p_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2$ - подходит по условию задачи

$p_2 = 1 - \frac{1}{1} = 0$ - не подходит по условию задачи

Проверим найденные $n = 1$ и $p = 2$:

$\frac{1^3 - 1 \cdot 2 + 1}{1^2 + 1 \cdot 2 + 2} = \frac{1 - 2 + 1}{1 + 2 + 2} = 0$ - целое число

+

Значит $n = 1$ и $p = 2$ решение

Ответ: $n = 1 \quad p = 2$

№4

~~$(8+\sqrt{65})^{2022} = k - (8-\sqrt{65})^{2022}$~~

$(8+\sqrt{65})^{2022} + (8-\sqrt{65})^{2022}$ - целое число ?

Пусть $(8+\sqrt{65})^{2022} = k - (8-\sqrt{65})^{2022}$?

$8 - \sqrt{65} < 0,07 \Rightarrow (8-\sqrt{65})^{2022} < (0,07)^{2022}$

Сравним $(0,07)^{2022}$ и $(0,1)^{2696}$

$(0,07^6)^{337} < (0,1^8)^{337}$

$2022 = 337 \cdot 2 \cdot 3$

$2426 = 2 \cdot 1213$

Найдем число, которое делится на 337 и больше 2426:

$2426 : 337 = 7$ с остатком

$337 \cdot 8 = 2696$

поскольку $0,07^6 < 0,1^8$, $k - (0,1)^n$ содержит "n" девяток после запятой

При $a < (0,1)^n$ выражение $k - a$ содержит как минимум "n-1" девяток после запятой. Так как $(0,07)^{2022} < (0,1)^{2696}$, $k - (0,07)^{2022}$ содержит как минимум 2695 девяток

+

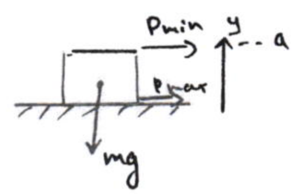
$2695 > 2426$

Что и требовалось доказать

№5

Дано:	СИ
$a = 5\ м/с^2$	
$p = 1000\ Па$	
$L = 10 см$	0,1 м
$g = 10\ м/с^2$	
P_{max} - ?	

Решение:



Пусть куб покоится, тогда давление в $y = 0$ $P_{max} = \rho g h$? $= 1000 \cdot 10 \cdot 0,1 = 1000$ ( )

а минимальное в $y = 0,1$ $P_{min} = 0$?

$P = 1000$ Па

$P_{max} = \frac{F_T}{S} + \frac{ma}{S} + P_{min}$ ✓

$\frac{F_T}{S} = \rho g h$

$\frac{\rho L^3 a}{L^2} = \rho L a$

$m = \rho V = \rho L^3$

$S = L^2$

Пояснения?

$P_{max} = 1000 \cdot 10 \cdot 0,1 + 1000 \cdot 0,1 \cdot 5 + 1000 = 1000 + 500 + 100 = 2500$ Па

Ответ: 2500 Па

10

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 77/6 – 10 – 18

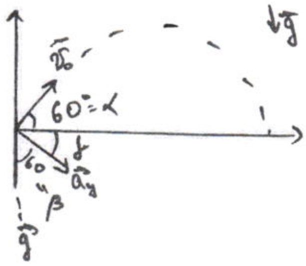
Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

№6

Дано:
$v_0 = 10$ м/с
$\alpha = 60°$
$g = 10$ м/с²
R – ?

Решение:
$\beta = 60°$ т.к. v_0 направлена по касательнос к окружности, а a_y как радиус.
Угол между касательной и радиусом равен 90° $\Rightarrow$ $\gamma = 90 - 60 = 30°$
а угол между осями прямой $\Rightarrow$
$\Rightarrow \beta = 90 - \gamma = 90 - 30 = 60°$



$a_y = \frac{v_0^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v_0^2}{a_y}$ ✓ $\Rightarrow R = \frac{v_0^2}{g\cos 60}$ $\Leftarrow$ $g = a_y \cos 60$ ✓

$R = \frac{100}{10 \cdot \frac{1}{2}} = 20\ (\ )$

Ответ: 20( )

10

№7

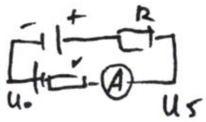
Дано:
$\Delta t = 5°$
$P = 1,5$ кВт
$c = 4200 \frac{Дж}{кг \cdot К}$
$\rho = 1$ г/см³ | СИ: 1000 кг/м³
τ – ?

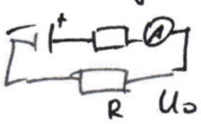
Решение:
$P\tau = Q$
$P\tau = mc\Delta t$
$\tau = \frac{mc\Delta t}{P} = \frac{1,5 \cdot 4200}{1,5 \cdot 10^3} = 21$ с

2

Ответ: 21 секунда

№8





$\begin{cases} U_0 - U_5 = I\,(r+R) \\ U_0 + U_5 = I_2\,(r+R) \end{cases}$

$I_1 = \frac{U_0}{R+r}$ $R_1 = \frac{U_0}{I_1} - r \Rightarrow R_1 + r = U_5$

$R + r = \frac{U}{I}$

$R = \frac{U}{I} - r$

$U_0 + U_5 + U_0 - U_5 = (I_2 - I_1)(r+R) =$

$= U_5 = (r+R)\left(\frac{U_5}{R_2+r} + \frac{U_5}{R_1+r}\right)$

$2 = (r+R)\left(\frac{R_1+R_2+2r}{(R_1+r)(R_2+r)}\right) = \frac{R_1+R_2}{R_1 \cdot R_2} \Rightarrow R = \frac{2R_1R_2}{R_1+R_2}$

$R = \frac{2 \cdot 12 \cdot 20}{12+20} = \frac{2 \cdot 12 \cdot 20}{32} = \frac{3 \cdot 20}{4} = 15$ Ом

2 вариант!

Ответ: 15 Ом

11