Построение графика № 2

$$y=\left(1-\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^5\right)^{\frac{1}{2}}+\left(1-\left(\frac{1-z^3}{1+z^2}\right)^7\right)^{\frac{1}{3}}$$

При $z=-1 \Rightarrow y=\sqrt{2}+1$

При $z=1 \Rightarrow y=1$

При $z=0 \Rightarrow y=1$

При $z=-0{,}5 \Rightarrow y > 1$

При $z=0{,}5 \Rightarrow y > 1$

При $z=2 \Rightarrow y > 1$

м/б $\frac{3}{5}$

3 об

№2

Пусть $t=tg\frac{\alpha}{2}$, тогда $\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2}$ $\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

тогда.

$$\begin{cases} \sin^4 x+\sin^5 y=1 \\ \cos^3 x+\cos^7 y=1 \end{cases}$$

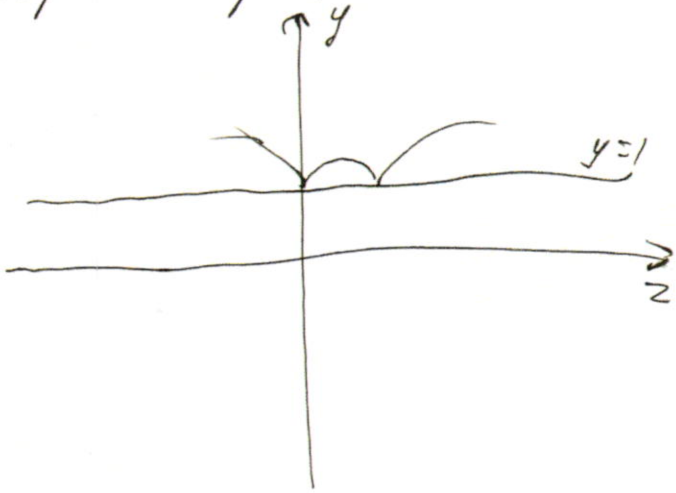
$$\begin{cases} \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^4+\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^5=1 \\ \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^3+\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)^7=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^4 \cancel{+\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)}=1-\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^5 \\ \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^3=1-\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)^7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2=\left(1-\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^5\right)^{\frac{1}{2}} \\ \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2=\left(1-\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)^7\right)^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

из $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

$$\Rightarrow \left(1-\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^5\right)^{\frac{1}{2}}+\left(1-\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)^7\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

Построим графика



$y=1$

$$y=\left(1-\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^5\right)^{\frac{1}{2}}+\left(1-\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)^7\right)^{\frac{2}{3}}$$

При $z=0$ $y=1$

При $z=1$ $y=1$ $\Rightarrow$ не б

~~$\Rightarrow [0;1];[1;1]$~~ ~~Вернемся~~

Найдем t

При $z=0$ $\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^4+\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^5=1 \Rightarrow \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^4+0=1 \Rightarrow t=\pm 1$

При $z=1$ $\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^4+\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^5=1 \Rightarrow \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^4+1=1 \Rightarrow t=0$

~~Верн~~ $\Rightarrow$ Корни: $[-1;0];[1;0];[0;1]$

пары угаданы 3б

Вернемся к x и y

$t=tg\frac{\alpha}{2}$ $\quad tg\frac{\alpha}{2}=1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi k$

$tg\frac{\alpha}{2}=-1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=-\frac{\pi}{4}+\pi k$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ корни: $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ 2\pi k\right];\left[+\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ 2\pi k\right];\left[2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$

шифр 23-11-08

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Вариант 1

№7

Действующее напряжение, напряжение при котором за такое-же время выделяется столько-же тепла

$t_{об} = 4t_0$

$$\frac{U_1^2}{R}t_0 + \frac{U_2^2}{R}t_0 + \frac{U_3^2}{R}t_0 + \frac{U_4^2}{R}t_0 = \frac{U_д^2}{R}t_{об} \Rightarrow$$

$U_1; U_2; U_3; U_4$ - берем из графика

$$U_1^2 t_0 + U_2^2 t_0 + U_3^2 t_0 + U_4^2 t_0 = U_д^2 4t_0$$

$$U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 = 4U_д^2$$

$$U_д = \sqrt{\frac{U_1^2+U_2^2+U_3^2+U_4^2}{4}} = \sqrt{\frac{10^2+5^2+0^2+(-5)^2}{4}} = \sqrt{\frac{150}{4}} =$$

15б

$$= \sqrt{37{,}5} \approx 6{,}1\ В$$

Ответ: 6,1 В

№8

Дано: ~~$\nu=2$, $T=300$~~
$\nu = 2$ моля
$T = 300K$
$V_2 = 3V_1$
40% ν_1 - диссоциировали.
~~$R = 8{,}31$~~

$A = ?$

$A = P\Delta V$ $\quad P_1 = P_2 = P_a = 10^5$ Па (т.к. поршень невесомы

Запишем уравнение Клапейрона-Менделеева для двух ситуаций

$P_1V_1 = \nu_1 RT_1$ $\quad \nu_2 = 0{,}6\nu_1 + 0{,}4\nu_1 \cdot 2 = 1{,}4\nu_1$ (т.к. 40% диссоциировались, из O_2 в 2

$P_2V_2 = \nu_2 RT_2$

Найдем T:

$$\frac{P_1V_1}{\nu_1 T_1} = \frac{P_2V_2}{\nu_2 T_2} \Rightarrow \frac{\cancel{P_1}\cancel{V_1}}{\cancel{\nu_1}T_1} = \frac{\cancel{P_2}\, 3\cancel{V_1}}{1{,}4\cancel{\nu_1} \cdot T_2} \Rightarrow T_2 = \frac{3}{1{,}4}T_1$$

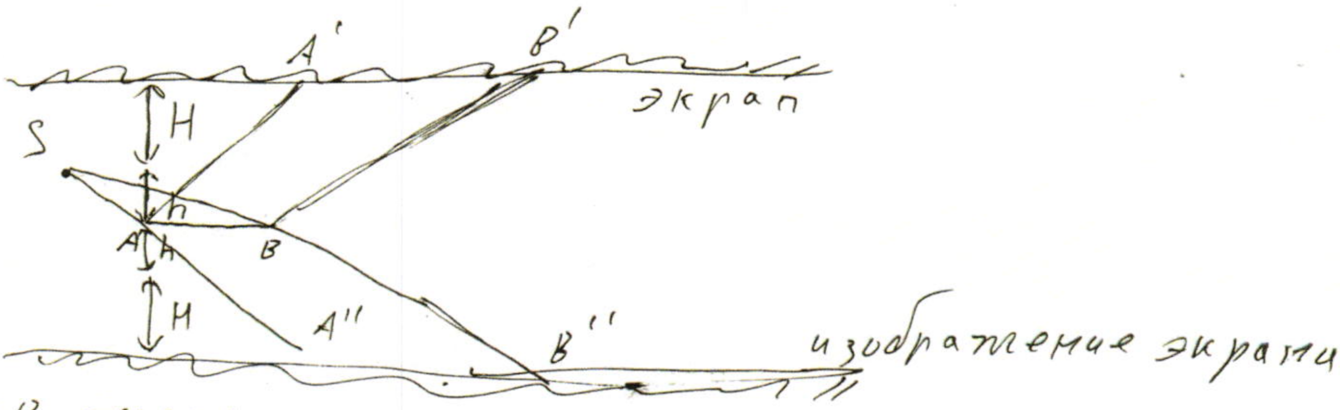
$$A = P\Delta V = P(V_2 - V_1) = \nu_2 RT_2 - \nu_1 RT_1 =$$

$$= 1{,}4\nu_1 \cdot R \cdot \frac{3}{1{,}4}T_1 - \nu_1 RT_1 = \nu_1 RT_1\left(1{,}4 \cdot \frac{3}{1{,}4} - 1\right) = 2\nu_1 RT_1 =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 8{,}31 \cdot 300 = 9972\ (Дж)$$

Ответ: ~~9972~~ $A = 9972$ (Дж)

10б



AB - зеркало
A'B' - солнечный зайчик
A''B'' - изображение солнечного зайчика

A'B' = A''B'' - по правилам геометрической оптики, т.к. AB || экран

При любом положении AB - вдоль линии движения, мы получаем два подобных треугольника: $\triangle ASB$ и $\triangle A''SB''$ из свойств подобных треугольников знаем, что отношение высоты ASB к высоте A''SB'' будет равно отношению подобных сторон этих треугольников =>

$\frac{h_{ASB}}{h_{A''SB''}} = \frac{AB}{A''B''} \Rightarrow \frac{h}{2h+H} = \frac{AB}{A''B''}$, т.к. h; $2h+H$; AB - по условиям задачи неизменяемы, то => A''B'' - так-же неизменяема, а так-как A''B'' = A'B', то A'B' - тоже неизменяемы =>

=> размеры солнечного зайчика не изменяются с течением времени => размеры солнечного зайчика изменились в 1 раз

Ответ: размеры солнечного зайчика изменились в 1 раз.

15б

отрицательному целому числу, тогда получаем

$\begin{cases}-b=-n-1\\ c=n\cdot 1\end{cases}$ $\begin{cases}-b=-(n+1)\\ c=n\end{cases}$ $\begin{cases}b=n+1\\ c=n\end{cases}$ $\begin{cases}n=b-1\\ c=n\end{cases} \Rightarrow c=b-1$

Так, как числа b и c ~~в~~ при эффективных ~~дей~~ операциях „движутся" навстречу друг другу c - от 22 до 2, b - от 20 до 20, то точно будет ситуация, когда $c=b-1$; например: $x^2+23x+22$ (имеет целые корни -22 и -1) $\Rightarrow$ в любом случае будет трехчлен с целыми корнями $\Rightarrow$

~~Ответ~~: среди полученных трехчленов будет трехчлен с целыми корнями (~~обоснование выше~~)

Из 1 и 2 случая $\Rightarrow$ что трехчлен с целыми корнями будет.

№5

$M=5$ кг
$m=30$ кг
$t=2$ с
$g=10\ \frac{м}{с^2}$

По II закону Ньютона:
$mg-T=0$
По III закону Ньютона:
$T=Ma$

$\Rightarrow mg-Ma=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a=\frac{mg}{M}$

$F=mg \quad v=at$

$$P=\frac{A}{t}=\frac{F\cdot S}{t}=Fv=$$
$$=mg\cdot at=mg\cdot\frac{mg}{M}\cdot t=\frac{m^2g^2t}{M}=\frac{30^2\cdot 10^2\cdot 2}{5}=$$
$$=\frac{900\cdot 100\cdot 2}{5}=900\cdot 20\cdot 2=18000\cdot 2=36000\ Вт=$$
$$=36\ кВт$$

Ответ: 36 кВт

10б

(продолжение)

дно, что $V_{MAB_1C_1} = V_{MA_1B_1C_1} + V_{AA_1B_1C_1}$, т.к $V_{MA_1B_1C_1}$ нам известен, найдем объем $V_{AA_1B_1C_1}$. Известно, что объем любой пирамиды ен $\frac{1}{3}S_{осн}\cdot h$. Найдем $h_{AA_1B_1C_1}$, $h_{AA_1B_1C_1}$ равна расстоянию от лоскости $A_1B_1C_1$ до основания ABC, зная коэффициент подобия айдем $h_{AA_1B_1C_1} = h_{MABC} - h_{MA_1B_1C_1} = \frac{3}{2}h_{MA_1B_1C_1} - h_{MA_1B_1C_1} = \frac{1}{2}h_{MA_1B_1C_1} \Rightarrow$

$V_{AA_1B_1C_1} = \frac{1}{3}S_{A_1B_1C_1}\cdot\frac{1}{2}h_{MA_1B_1C_1}$, а так как $V_{MA_1B_1C_1} = \frac{1}{3}S_{A_1B_1C_1}\cdot h_{MA_1B_1C_1}$,

то $\Rightarrow V_{AA_1B_1C_1} = \frac{1}{2}V_{MA_1B_1C_1} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{MAB_1C_1} = \cancel{V_{MA_1B_1C_1}}\ V_{MA_1B_1C_1} + \frac{1}{2}V_{MA_1B_1C_1} = \frac{3}{2}V_{MA_1B_1C_1} = \frac{3}{2}\cdot 96 = 144$

Ответ: $V_{MAB_1C_1} = 144$

13б

14б

№4

$\boxed{ax^2+bx+c \text{ — стандартный вид трехчлена}}$

У нас возможно 2 случая:
I случай (датчик может совершать неэффективные операции)
Датчик может совершать неэффективные операции, например, +1, а затем −1. В таком случае он может привести нас к любому трехчлену с значением $a=1$ (т.к. датчик не влияет на a) $\Rightarrow$ среди ~~уравнений~~ трехчленов возмо~~жно уравнение~~ ет трехчлен с целыми корнями, например: $x^2-7x+10$, корни 2; 5.
II случай (датчик совершает только эффективные операции):
Пусть у нас будут целые корни x_1 и x_2. Тогда из теоремы Виета, ~~да~~ учитывая $a=1$, мы знаем, что $x_1+x_2=-b$; $x_1\cdot x_2=c$.
У нас трехчлен $x^2+20x+22$ преобразуется в трехчлен $x^2+202x+2$. $\Rightarrow$ Если есть целые корни, то выполняются условия

$$\begin{cases} -202 \le x_1+x_2 \le -20 \\ 2 \le x_1\cdot x_2 \le 22 \end{cases}$$

Что является возможным $\Rightarrow$ докажем, что мы точно встретим ситуацию, удовлетворяю условию.
Например $x_1=-20$; $x_2=-1$

c — у нас положительная, а и b — тоже $\Rightarrow$ корни в сумме должны давать отрицательное число (из $x_1+x_2=-b$), а их произведение должно быть положительным. Пусть один из корней ~~дол~~ будет равняться $(-n)$ — равняться −1, тогда второй корень будет

продолжение →

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 23-11-08

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	10	3	13	14	10	15	15	10	90

Вариант 1

без изменений

№1

Дано: $2b > 4a + c > 0$ Доказать $b^2 > 4ac$

$\begin{cases} 2b > 4a + c \\ 4a + c > 0 \end{cases}$ | разделим на 2

$\begin{cases} b > 2a + \frac{c}{2} \\ 2a + \frac{c}{2} > 0 \end{cases}$ | возведем в квадрат

$\begin{cases} b^2 > 4a^2 + 2ac + \frac{c^2}{4} \\ 4a^2 + 2ac + \frac{c^2}{4} > 0 \end{cases}$

10б

Из $b^2 > 4a^2 + 2ac + \frac{c^2}{4}$, следует что $b^2 > 4ac$ будет выполнятся в том случае, если $4a^2 + 2ac + \frac{c^2}{4} \geq 4ac$, докажем это

$4a^2 + 2ac + \frac{c^2}{4} \geq 4ac$

$4a^2 - 2ac + \frac{c^2}{4} \geq 0$

$\left(2a - \frac{c}{2}\right)^2 \geq 0$

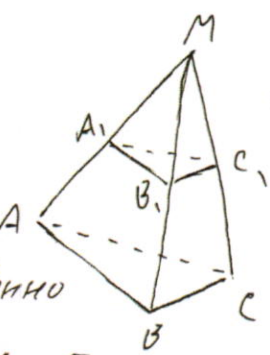
$\left(2a - \frac{c}{2}\right)^2$ - всегда будет ≥ 0, т.к отрицательные значения выражение принимать не может. => $4a^2 + 2ac + \frac{c^2}{4} \geq 4ac$ - это доказано, а т.к. $b^2 > 4a^2 + 2ac + \frac{c^2}{4}$ (нашли ранее), то из этого следует, что $b^2 > 4ac$

№3

Дано: $V_{MABC} = 324$; $V_{MA_1B_1C_1} = 96$

плоскость $A_1B_1C_1$ || ~~плоскости~~ основания ABC

Найти: $V_{MA_1B_1C_1}$



① Пирамиды $MABC$ и $MA_1B_1C_1$ подобны, т.к. A_1, B_1, C_1 лежат на MA, MB, MC соответственно и плоскость $A_1B_1C_1$ || основанию ABC =>

Найдем коэфициент подобия, зная что в объемных фигурах (~~в объемах~~)

$\frac{V_1}{V_2} = k^3$. $\frac{V_{MABC}}{V_{MA_1B_1C_1}} = k^3 \Rightarrow k = \sqrt[3]{\frac{V_{MABC}}{V_{MA_1B_1C_1}}} = \sqrt[3]{\frac{324}{96}} = \sqrt[3]{\frac{108}{32}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$

продолжение →