

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр _____

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	10	3	13	4	10	-	15	10	65

Вариант 2

1. $3b > 9a + c > 0$, Доказать $b^2 > 4ac$
возведем в квадрат все части неравенства

$$9b^2 > 81a^2 + 18ac + c^2 > 0$$

Разделим части неравенства на 9

$$b^2 > 9a^2 + 2ac + \frac{c^2}{9} > 0$$

Возьмем неравенство Коши: $(a+b) \geq 2\sqrt{ab}$

$$9a^2 + \frac{c^2}{9} \geq 2\sqrt{9a^2 \cdot \frac{c^2}{9}}$$

$$9a^2 + \frac{c^2}{9} \geq \frac{2 \cdot 3a \cdot c}{3}$$

$$9a^2 + \frac{c^2}{9} \geq 2ac$$

$$9a^2 + \frac{c^2}{9} + 2ac \geq 2ac + 2ac$$

$$b^2 > 9a^2 + 2ac + \frac{c^2}{9} \geq 4ac > 0 \Rightarrow \text{Таким образом, мы приходим}$$

к выводу, что $b^2 > 4ac$
что и требовалось доказать.

$$2. \begin{cases} \sin^3 x + \sin^4 y = 1 \\ \cos^3 x + \cos^5 y = 1 \end{cases}$$

Рассмотрим случаи: *попарно.*

$$1) \begin{cases} \sin^3 x = 0 \\ \sin^4 y = 1 \\ \cos^3 x = 1 \\ \cos^5 y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ y = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \text{ или } \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sin^3 x = 1 \\ \sin^4 y = 0 \\ \cos^3 x = 0 \\ \cos^5 y = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ y = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ y = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ y = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $(2\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n), n \in \mathbb{Z}$; $(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$

$$4. \quad x^2 - 20x + 22 \Rightarrow x^2 - 202x + 2$$

$$1) \quad x^2 - 21x + 22 \quad (-1x)$$

$$x^2 - 22x + 22 \quad (-2x)$$

$$x^2 - 23x + 22 \quad (-3x)$$

$$x^2 - 23 + 22 = 0$$

$$D = 529 - 88 = 441$$

$$x_1 = \frac{23+21}{2} = 22$$

$$x_2 = \frac{23-21}{2} = 1 \Rightarrow \text{целые корни}$$

$$2) \quad x^2 - 20x + 21 \quad (-1)$$

$$x^2 - 20x + 20 \quad (-2)$$

$$x^2 - 20x + 19 \quad (-3)$$

$$x^2 - 20x + 19 = 0$$

$$D = 400 - 76 = 324$$

$$x_1 = \frac{20+18}{2} = 19$$

$$x_2 = \frac{20-18}{2} = 1 \Rightarrow \text{целые числа}$$

±

Я нашла 2 трехмена, полученных в процессе, у которых целые корни. Но мы не можем точно предугадать действие датчика \Rightarrow следовательно, утверждать однозначно, что среди полученных в процессе квадратных трехменов есть такой, у которого целые корни, мы не можем.

Ответ: верно, но при определенной последовательности действий датчика.

5. Дано:

$$M = 8 \text{ кг}$$

$$m = 20 \text{ кг}$$

$$\Delta t = 3 \text{ с}$$

$$N = ?$$

Решение:

Обезьяна все время находится на постоянной высоте, т.е. отн-но земли она покоится. Тогда согласно второму закону Ньютона, сумма сил действующих на обезьяну, равна нулю: ?

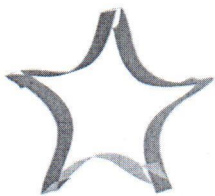
$$\text{Оу: } F - mg = 0 \Rightarrow F = mg$$

Скорость веревки изменяется с течением времени под действием силы \Rightarrow иметь ускорение a :

$$\text{Оу: } F - Mg = Ma$$

$$mg - Mg = Ma$$

$$a = \frac{mg - Mg}{M} = \frac{g(m - M)}{M}$$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр _____

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

Скорость веревки изменяется со временем по закону:

$$v = at \Rightarrow v = \frac{g(m-M)}{M} \cdot t$$

Мощность, развиваемая обезьяной, через $t = 3$ с после начала движения

$$N = Fv = \frac{g(m-M)}{M} \cdot t \cdot mg = mg - Mg \quad \frac{mg^2 \cdot t (m-M)}{M}$$

$$N = \frac{20 \cdot 100 \cdot 3(20-8)}{8} = 125 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 12 = 9000 \text{ Вт} = 9 \text{ кВт}$$

Ответ: 9 кВт

7. Дано:

$$U_1 = 50 \text{ В}$$

$$U_2 = 100 \text{ В}$$

$$U_3 = -50 \text{ В}$$

$$U_4 = 50 \text{ В}$$

$$T = 4t_0$$

$U_{\text{геоэв}} = ?$

Решение:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$$

$$Q_1 = \frac{U_1^2 t_0}{R}$$

$$Q_2 = \frac{U_2^2 t_0}{R}$$

$$Q_3 = \frac{U_3^2 t_0}{R}$$

$$Q_4 = \frac{U_4^2 t_0}{R}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{t_0}{R} (U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2)$$

$$P = \frac{Q}{4t_0} = \frac{t_0 (U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2)}{R \cdot 4t_0} = \frac{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2}{4R}$$

$$P = \frac{U_{\text{геоэв}}^2}{R} = \frac{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2}{4R}$$

$$U_{\text{геоэв}}^2 = \frac{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2}{4} \Rightarrow U_{\text{геоэв}} = \sqrt{\frac{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2}{4}}$$

$$U_{\text{геоэв}} = \sqrt{\frac{50^2 + 100^2 + 50^2 + (-50)^2}{4}} = \sqrt{\frac{17500}{4}} \approx 66,1 \text{ В}$$

Ответ: 66,1 В

8. Дано:

$$V = 4 \text{ моль}$$

$$T = 350 \text{ К}$$

$$V_2 = 2V_1$$

$$\eta = 60\% = 0,6$$

A - ?

Решение:

Т.к. 60% молекул диссоциировали на атомы \Rightarrow кол-во вещества увеличилось в $\eta = 1,6$ раза $\Rightarrow V_2 = V_1 \cdot 1,6$

$$V_2 = 1,6 \cdot 4 = 6,4 \text{ моль}$$

процесс изобарный, из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$\begin{cases} pV_1 = \nu RT_1 \\ p \cdot 2V_1 = V_2 RT_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{V_2 T_2}{V_1 T_1} = 2$$

$$T_2 = \frac{2V_1 T_1}{V_2}$$

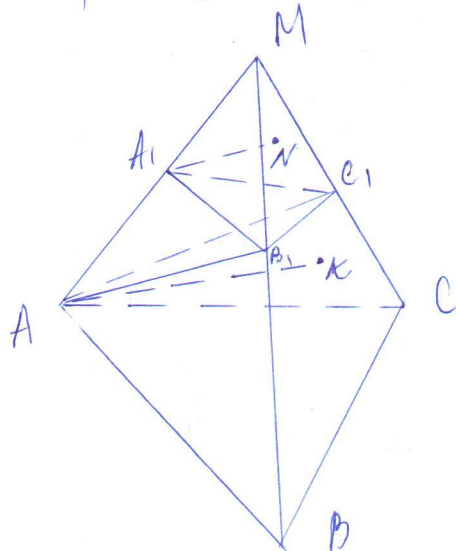
$$T_2 = \frac{2 \cdot 4 \cdot 350}{6,4} = 437,5 \text{ К}$$

$$A = p \Delta V = V_2 RT_2 - V_1 RT_1 = R(V_2 T_2 - V_1 T_1)$$

$$A = 8,31 (6,4 \cdot 437,5 - 4 \cdot 350) = 11634 \text{ Дж}$$

Ответ: 11634 Дж

3.



Дано: $V_{MABC} = 375$

$$V_{MAB_1C_1} = 81$$

Найти: $V_{MAB_1C_1}$

Решение:

+

$$\frac{V_{MABC}}{V_{MAB_1C_1}} = \frac{375}{81} = \frac{125}{27} \Rightarrow \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{5}{3}$$

Пирамиды AMB_1C_1 и $A_1MB_1C_1$ имеют общее основание ΔMB_1C_1

$$\left. \begin{array}{l} A_1N \perp (MBC) \\ AK \perp (MBC) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{A_1N}{AK} = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5}$$

$$\frac{V_{MA_1B_1C_1}}{V_{MAB_1C_1}} = \frac{S_{осн} \cdot h_{MA_1B_1C_1}}{S_{осн} \cdot h_{MAB_1C_1}} = \frac{A_1N}{AK} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{81}{V_{MAB_1C_1}} \Rightarrow V_{MAB_1C_1} = \frac{81 \cdot 5}{3} = 135$$

Ответ: 135