шифр 10-11-68

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	–	2	–	–	0	15	0	0	17

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Вариант 1

②. $\begin{cases} \sin^4 x + \sin^5 y = 1, \\ \cos^3 x + \cos^7 y = 1, \end{cases}$ Заметим, что $\sin a$ и $\cos a$ принимают значения в промежутке $[-1; 1]$, а значит, $\sin^{2k+1} a$ и $\cos^{2k+1} a$ лежат в том же промежутке.

Если одно из слагаемых любого из уравнений меньше 0, то второе автоматически принимает значения больше 1 – противоречие:

$\left\{ \begin{array}{l} \cos^3 x < 0 \\ 1-\cos^7 y < 0 \\ \cos^7 y > 1 \end{array} \right.$ Поэтому все слагаемые должны принимать значения $[0; 1]$, откуда $y \in [0; \frac{\pi}{2}]$ ($\cos y \geq 0$ и $\sin y \geq 0$), $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ ($\cos x \geq 0$, $\sin^4 x \geq 0$ по опред.)

Подборкой находим ответы: ~~(0;1) и (1;0)~~ $(0; \frac{\pi}{2})$, и $(\frac{\pi}{2}; 0)$, и $(-\frac{\pi}{2}; 0)$

$\begin{cases} \sin^4 0 + \sin^5 \frac{\pi}{2} = 1^5 = 1, \\ \cos^3 0 + \cos^7 \frac{\pi}{2} = 1^3 = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} \sin^4 \frac{\pi}{2} + \sin^5 0 = 1^4 = 1, \\ \cos^3 \frac{\pi}{2} + \cos^7 0 = 1^7 = 1, \end{cases}$

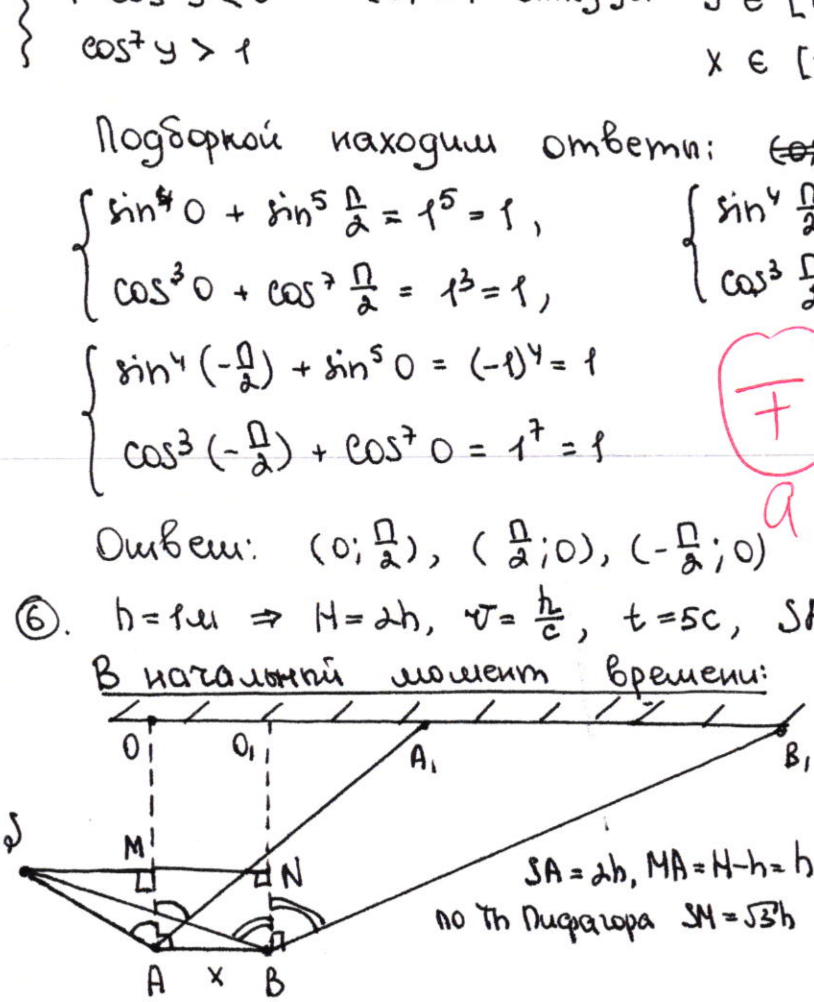
$\begin{cases} \sin^4 (-\frac{\pi}{2}) + \sin^5 0 = (-1)^4 = 1 \\ \cos^3 (-\frac{\pi}{2}) + \cos^7 0 = 1^7 = 1 \end{cases}$

7

Ответ: $(0; \frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}; 0)$, $(-\frac{\pi}{2}; 0)$ А период?

⑥. $h = 1м \Rightarrow H = 2h$, $v = \frac{h}{c}$, $t = 5c$, $SA = 2h$. Пусть длина зеркала x.

В начальный момент времени:



$SA = 2h$, $MA = H - h = h$

по Th Пифагора $SM = \sqrt{3} h$

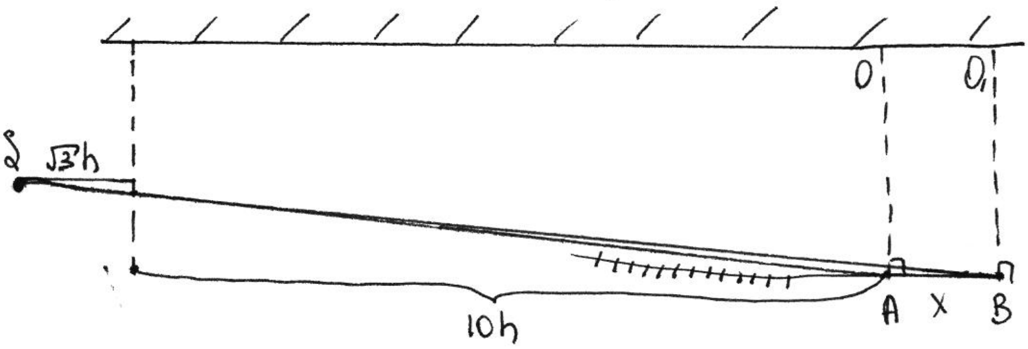
Размеры солнечного зайчика определяются расстоянием между отраженными на стенку от крайних точек зеркала A и B лучами. прямоуг. $\triangle SMA \sim \triangle A_1OA$ (по 2 ∠):

$\frac{SM}{A_1O} = \frac{MA}{OA} \Rightarrow A_1O = \sqrt{3} h \cdot \frac{3h}{h} = 3\sqrt{3} h$

Аналогично $\triangle SNB \sim \triangle B_1O_1B$: $\frac{SN}{B_1O_1} = \frac{NB}{O_1B} \Rightarrow B_1O_1 = (\sqrt{3} h + x) \cdot \frac{3h}{h} = 3\sqrt{3} h + 3x$

При этом $B_1O_1 + O_1O = A_1O + A_1B_1 \Rightarrow A_1B_1 = B_1O_1 + AB - A_1O = 3\sqrt{3} h + 3x + x - 3\sqrt{3} h = 4x$

В конечный момент времени:



Из аналогичных подобий находим:

$A_1O = 3(10+\sqrt{3})h$

$B_1O_1 = 3((10+\sqrt{3})h + X)$

$A_1B_1 = 3(10+\sqrt{3}h) + 3X + X - 3(10+\sqrt{3})h = 4X$

Ответ: размеры солнечного зайчика никак не изменились. в любом случае он равен 4 длинам зеркала

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 10-11-68

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

① $2b > 4a + c > 0$, значит, можем возвести обе части н-ва в квадрат

$4b^2 > 16a^2 + 8ac + c^2$

$b^2 > 4a^2 + 2ac + \frac{c^2}{4}$.

Сравним $4a^2 + 2ac + \frac{c^2}{4} \vee 4ac$: $\quad 4a^2 - 2ac + \frac{c^2}{4} \vee 0$

$(2a - \frac{c}{2})^2 \vee 0$

По определению, квадрат числа неотрицателен, т.е.

$(2a - \frac{c}{2})^2 \geq 0$

$4a^2 + 2ac + \frac{c^2}{4} \geq 4ac$.

Поэтому $b^2 > 4a^2 + 2ac + \frac{c^2}{4} \geq 4ac \Rightarrow b^2 > 4ac$, чтд

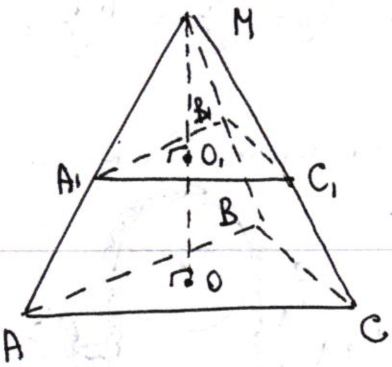
③. Дано: пирамида MABC

$\alpha = (A_1B_1C_1)$, $\alpha \parallel (ABC)$

$A_1 \in MA$, $B_1 \in MB$, $C_1 \in MC$

~~MABC~~ $V_{MABC} = 324$, $V_{MA_1B_1C_1} = 96$

Найти: $V_{MAB_1C_1}$



Решение

1. Опр $MO \perp (ABC)$ и $MO_1 \perp (A_1B_1C_1)$. Т.к. $(A_1B_1C_1) = \alpha \parallel (ABC)$, то $MO_1 \parallel MO^{(1)}$ или M, O, O_1 лежат на одной прямой$^{(2)}$. Но $M \in MO$, $M \in MO_1$, поэтому верно (2) и $O_1 \in MO$.
2. Тогда $V_{MABC} = S_{ABC} \cdot MO$, $V_{MA_1B_1C_1} = S_{A_1B_1C_1} \cdot MO_1$. Параллельные плоскости отсекают от пирамиды две подобные пирамиды, поэтому $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, $MABC \sim MA_1B_1C_1$, причем: (k - коэф. подобия)

$$\frac{V_{MABC}}{V_{MA_1B_1C_1}} = k^3 \Rightarrow k = \sqrt[3]{\frac{324}{96}} = \sqrt[3]{\frac{2^2 \cdot 3^4}{2^5 \cdot 3}} = \sqrt[3]{\frac{3^3}{2^3}} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Отсюда же $MO = k \cdot MO_1 = \frac{3}{2} MO_1$.

3. $V_{AA_1B_1C_1} = S_{A_1B_1C_1} \cdot OO_1 = S_{A_1B_1C_1} \cdot (MO - MO_1) = \frac{V_{A_1B_1C_1M}}{MO_1} \cdot \frac{1}{2} MO_1 = \frac{96}{2} = 48.$

(т.к. $MO_1 \perp \alpha$, то и $OO_1 \perp \alpha$)

4. $V_{MABC_1} = V_{MA_1B_1C_1} + V_{AA_1B_1C_1} = 96 + 48 = 144$

Ответ: 144

(8).* Дано: сосуд

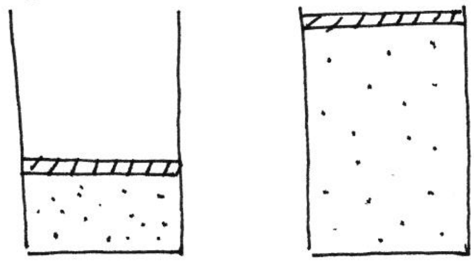
$\nu_0 = 2$ моль

$T_0 = 300K$

$V = 3V_0$

$n = 0,4$

$A - ?$



Т.к. нагревание медленное, то $p = const$. По уравнению Менделеева - Клапейрона:

$$\frac{\cancel{p}V_0}{T_0} = \frac{\cancel{p}V}{T} = \frac{3V_0}{T} \Rightarrow T = 3T_0$$

При диссоциации молекул вещества меняется его количество:

$$\nu_0 = \frac{N_0}{N_A}, \quad \nu = \frac{N}{N_A} = \frac{(1-n)N_0}{N_A} = (1-n)\cdot\nu_0$$

Для газов выполняется уравнение: $pV = \nu RT$, $p_0V_0 = \nu_0 RT_0$

Тогда работа газа при $p = const$ равна: $A = p(V - V_0) = pV - pV_0 =$

$= \nu RT - \nu_0 RT_0 = (1-n)\nu_0 R\cdot 3T_0 - \nu_0 RT_0 = \nu_0 RT_0(3(1-n) - 1) = 2 \text{ моль} \cdot 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{К}\cdot\text{моль}} \cdot 300\text{К}$

$\cdot (3\cdot(1-0,4) - 1) = \cancel{2\cdot 8,31\cdot 0,8 \frac{\text{Дж}}{\text{К}} = 8,31\cdot 1,6 \text{ Дж}} = 600\cdot 8,31\cdot 0,8 \text{ Дж} = 8,31\cdot 480 \text{ Дж} =$

$= 3988,8 \text{ Дж} \approx 4 \text{кДж}$

Ответ: 4 кДж

(7). Амплитудное напряжение в цепи по графику: $U_m = 10В$

Действующее: $U_д = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{10В}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}В}{2} = 5\sqrt{2}В \approx 5\cdot 1,4В = 7В$

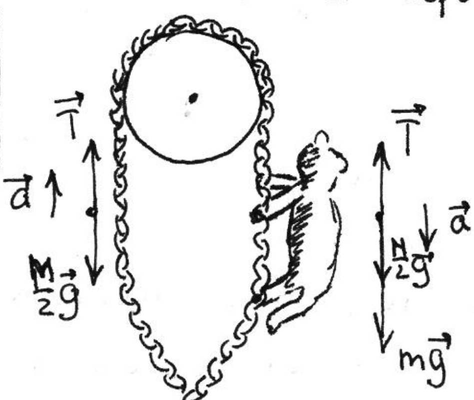
Ответ: 7В

(5). Дано: неподвижный блок и верёвка

$M = 5кг$; $m = 30кг$

$t = 2с$

$P - ?$



Рассмотрим силы, действующие на оба конца верёвки. Тот конец, на котором прицеплена обезьяна, движется вниз с ускорением a. Другой – вверх с тем же ускорением. Т.к. обезьяна остаётся на той же высоте, то она движется вверх по веревке с тем же ускорением отн. земли

по II ЗН:

$$\begin{cases} \vec{T} + \frac{M}{2}\vec{g} = \frac{M}{2}\vec{a} \\ \vec{T} + \frac{M}{2}\vec{g} + m\vec{g} = \frac{M}{2}\vec{a} \end{cases}$$

в проекции на Oy:

$$\begin{cases} -T + \frac{M}{2}g = -\frac{M}{2}a, \quad T = \frac{M}{2}(g+a) \\ -T + \frac{M}{2}g + mg = \frac{M}{2}a \Rightarrow -\frac{M}{2}a + mg = \frac{M}{2}a \Rightarrow a = \frac{m}{M}g \end{cases}$$

По определению, $P = Fv$, где $F = mg$ – сила, которую прикладывает обезьяна для удержания своего веса на той же высоте, а $v = at$

$P = mg\cdot at = \frac{(mg)^2}{M}t = \frac{(30кг\cdot 10\frac{м}{с^2})^2}{5кг}\cdot 2с = 90000\cdot 0,4 Вт = 36000 Вт = 36 кВт$

Ответ: 36 кВт