63-09-05

шифр ______

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	11	12	13	4	8	0	5	14	66

Вариант 1.

стр №1.

№1.

Во-первых, мы понимаем, что нужно вычеркнуть все чётные числа, т.к. если встретится в произведении хотя бы одно чётное, то всё произведение будет чётным, а значит заканчиваться на чётную цифру, но у нас произведение оканчивается на 1. Всего чётных чисел от 1 до 2022: 1011, т.к. каждое второе число – чётное. Теперь, после того, как мы убрали все чётные, остаются только нечётные числа. Среди них будут числа, которые оканчиваются на 5. Же заметим, что при перемножении числа, оканчивающегося на 5 и числа-нечётного мы получим обязательно число, которое оканчивается на 5:

$5\cdot1=5$

$5\cdot3=15$

$5\cdot5=25$

$5\cdot7=35$

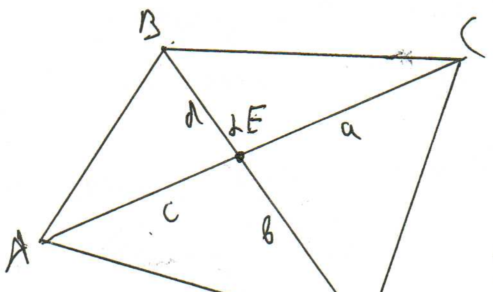
$5\cdot9=45$

т.к. мы перебрали все случаи, когда второй множитель из нашего произведения оканчивается на любую из нечётных цифр. Значит, если останется хотя бы одно число, которое оканчивается на 5, то и всё произведение будет оканчиваться на 5, чего быть не может.

Таким образом, нужно вычеркнуть все числа, которые оканчиваются на 5. т.к. в каждой десятке от 1 до 10, от 11 до 20, ..., от 2019 до 2020 по одному такому числу, то вычеркнуть нужно: 202 числа, т.к. всего десятков 202. ($2020:10=202$). Тогда у нас остаётся произведение нечётных чисел кроме чисел, оканчивающихся на 5. Разобьём наше произведение следующим образом: в каждой десятке объединим числа, оканчивающиеся на 1, 3 и 7. Числа, оканчивающиеся на 9 отбросим в сторону. Заметим, что в каждой такой тройке чисел, оканчивающихся на 1, 3 и 7 произведение будет ~~ок~~ оканчиваться на 1, т.к.: $1\cdot3\cdot7=21$. Тогда если мы рассмотрим произведение всех таких троек, что т.к. в каждой произ ведение оканчивается на 1, то и всё произведение будет оканчиваться на 1. Таким образом произведение всех чисел оканчивающихся на 1, 3 и 7 оканчивается на 1. Вернёмся к 9-кам, т.е. к числам, которые оканчиваются на 9 и расм. их произведение. Всего чисел, оканчивающихся на 9, аналогично рассуждениям с числами, которые оканчиваются на 5: 202. Значит, т.к. их чётное кол-во, то их можно разбить ~~по~~ на пары. В каждой такой паре произведение оканчивается на 1: $9 \cdot 9 = 81$. Значит и всё произведение всех чисел, оканчивающихся на 9 так же оканчивается на 1. Тогда всё общее произведение так же будет оканчиваться на 1, т.к. произведение всех чисел с последней цифрой 9 оканчивается на 1, а так же произведение всех чисел, оканчивающихся на 1, 3 и 7 оканчивается на 1. Таким образом, мы удалили минимальное кол-во множителей, доказав, что их удаление неизбежно и получили, что произведение оканчивается на 1. Значит, ответ: $1011 + 202 = 1213$.

Ответ: 1213.

№2.



Дано:
ABCD выпуклый четырёхугольник
$BD \cap AC =$ т. E.
$S_{ABD} = 10$ см^2
$S_{ACD} = 9$ см^2
$S_{AED} = 6$ см^2
Найти:
S_{ABCD}

Решение:

Пусть $AE = c$; $BE = d$; $CE = a$ и $DE = в$

~~Тогда заметим, что по формуле нахождения~~

Пусть так же $\angle BEC = \alpha$, тогда $\angle CED = \angle BEA = 180° - \alpha$, как смежные с ним и $\angle AED = \alpha$, как вертикальный с $\angle BEC$.

Тогда по формуле нахождения площади Δ-ка:
$S_{AED} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin\alpha$. Так же заметим, что $S_{ABE} = S_{ABD} - S_{AED} = 10\text{ см}^2 - 6\text{ см}^2 = 4\text{ см}^2$. Аналогично $S_{CED} = S_{ACD} - S_{AED} = 9\text{ см}^2 - 6\text{ см}^2 = 3\text{ см}^2$.

Аналогично по формуле нахождения площади:
$S_{ABE} = \frac{1}{2} cd \cdot \sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2} cd \cdot \sin\alpha$ и $S_{CED} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2} ab \sin\alpha$. Имеем систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} bc \sin\alpha = 6 \\ \frac{1}{2} cd \sin\alpha = 4 \\ \frac{1}{2} ab \sin\alpha = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

63-09-05

шифр ______________

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1.

Стр №3.

$\Leftrightarrow \begin{cases} bc\sin\alpha = 12 \ (1) \\ cd\sin\alpha = 8 \ (2) \\ ab\sin\alpha = 6 \ (3) \end{cases}$ $\qquad \dfrac{(1)}{(3)} \Leftrightarrow \dfrac{bc\sin\alpha}{ab\sin\alpha} = \dfrac{12}{6} \Leftrightarrow \dfrac{c}{a} = 2$

Так же заметим, что $S_{CEB} = \frac{1}{2} ad\sin\alpha \Rightarrow \dfrac{S_{CEB}}{S_{ABE}} = \dfrac{\frac{1}{2}ad\sin\alpha}{\frac{1}{2}cd\sin\alpha} = \dfrac{a}{c} = \left(\dfrac{c}{a}\right)^{-1} = \dfrac{1}{2}$

Тогда $S_{CEB} = \dfrac{S_{ABE}}{2} = \dfrac{4\text{ см}^2}{2} = 2\text{ см}^2$.

Значит, $S_{ABCD} = S_{ABE} + S_{BEC} + S_{CED} + S_{AED} = 4\text{ см}^2 + 2\text{ см}^2 + 3\text{ см}^2 + 6\text{ см}^2 =$

$= 15\text{ см}^2$

Ответ: 15 см^2.

№3.

Да, существует. Например кв. трёхчлен $x^2 - 1$.

Для $\forall\, n \in \{0, 1, 2, \dots, 2022\}$: $P(x) = x^2 + nx + (n-1)$. У трёхчлена такого вида один из корней будет равен $-1 \in \mathbb{Z}$: $P(-1) = (-1)^2 - n + (n-1) =$ $= 1 - n + n - 1 = 0$, а второй равен $1 - n \in \mathbb{Z}$, т.к. n и $1 \in \mathbb{Z}$:

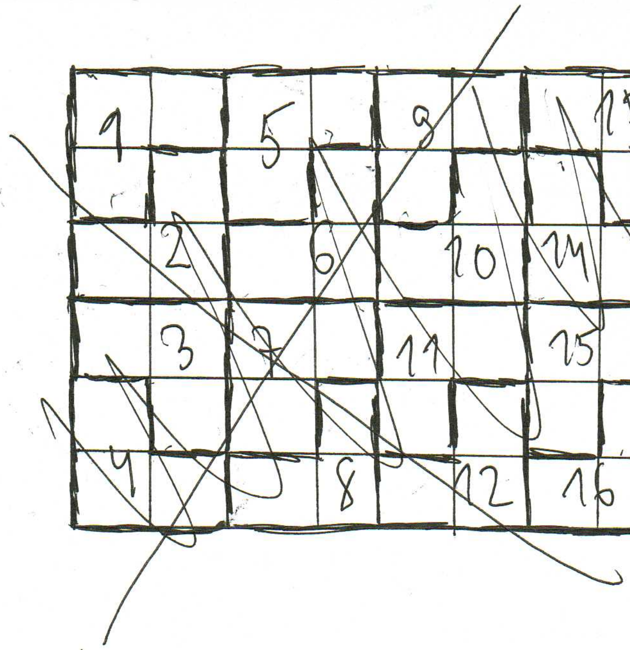
$P(1-n) = (1-n)^2 + n(1-n) + (n-1) = 1 + n^2 - 2n + n - n^2 + n - 1 = 0$.

Ответ: да, существует.

~~№4.~~

~~Мы получаем, ~~что~~ что всего клеток в прямоугольнике 6×8: 48.~~

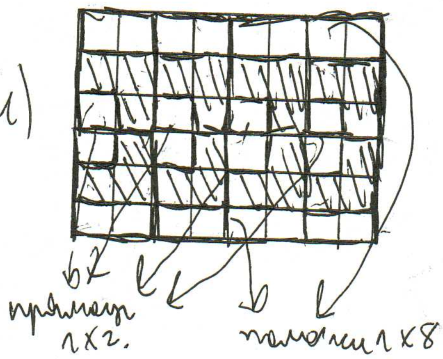
~~т.к. каждый уголок занимает 3 клетки, то поместить можно не более, чем: $\frac{48}{3} = 16$ уголков. Пример на 16 уголков:~~



№4.

Оценка. Разобьём наш прямоугольник на прямоугольники 3×2 следующим образом:

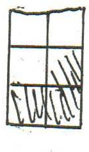
(1)



Ответ: 8

Заметим, что в каждом таком прямоугольнике должен быть хотя бы 1 уголок, иначе туда легко можно поместить уголок:

(2)

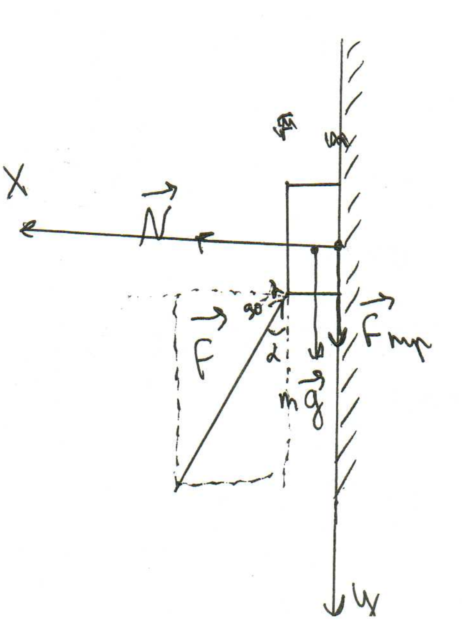


Тогда, т.к. ~~их~~ таких прямоугольников 8, то уголков нужно поместить в нашу таблицу хотя бы 8.

Пример на 8 представлен на рис. (1)

Очевидно, что при такой расстановке уголков свободные клетки разбиваются на пересекающиеся прямоугольники 1×2, ~~поэтому ни один уголок больше не поместится~~ а так же на две полоски 1×8. Поэтому больше уголков не поместится.

№7.



Введём систему координат следующим образом: ось X сонаправлена с вектором силы $\vec N$, а ось y сонаправлена векторами силы тяжести $m\vec g$ и $\vec F_{тр}$.

Условие равновесия в векторном виде:

$$\vec N + \vec F_{тр} + m\vec g + \vec F = 0$$ +

Проекции на Oy:

$F_{тр} + mg = F\cos\alpha$; ($\vec N$ не участвует, т.к. его проекция равна 0)

На Ox:

$N = F\cos(30-\alpha) \Rightarrow N = F\sin\alpha$.

и $\vec{F}_{тр}$ не участвуют, т.к. их проекции на $OX = \cancel{0}$ равны нулю).

Запишем систему:

$$\begin{cases} F_{тр} + mg = F\cos\alpha \\ N = F\sin\alpha \end{cases}$$

Также заметим, что: $F_{тр} = \mu N$. Значит в нашей системе появляется ещё одно ур-ние:

$$\begin{cases} F_{тр} + mg = F\cos\alpha \\ N = F\sin\alpha \\ \mu N = F_{тр} \end{cases}$$

Тогда $F_{тр} + mg = F\cos\alpha \Leftrightarrow$

$\mu N + mg = F\cos\alpha \Leftrightarrow$

$\mu F\sin\alpha + mg = F\cos\alpha \Leftrightarrow$

$F(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) = mg \Leftrightarrow$

$$F = \frac{mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} = \frac{1\,кг\cdot 10\,м/с^2}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0{,}2} =$$

$$= \frac{10\cdot 2\,Н}{1 - 0{,}2\cdot\sqrt{3}} = \frac{20\cdot(1+0{,}2\sqrt{3})}{(1-0{,}2\sqrt{3})(1+0{,}2\sqrt{3})}\,Н =$$

$$= \frac{20+4\sqrt{3}}{1-0{,}04\cdot 3}\,Н = \frac{20+4\sqrt{3}}{1-0{,}12}\,Н =$$

$$= \frac{20+4\sqrt{3}}{0{,}88}\,Н = \frac{2000+400\sqrt{3}}{88}\,Н =$$

$$= \frac{250+50\sqrt{3}}{11}\,Н = \frac{50(5+\sqrt{3})}{11}\,Н.$$

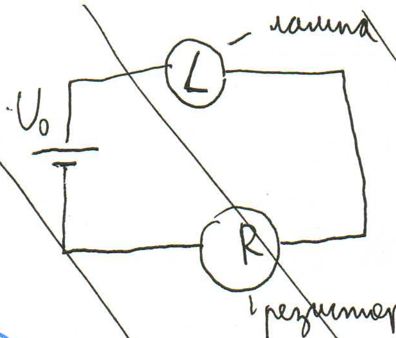
* (Положим $g = 10\,м/с^2$, почти на суть решения это никак не влияет).

* ($\cos 60° = \frac{1}{2}$, $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$).

~~Ответ может по~~
Тогда ответ: $\frac{50(5+\sqrt{3})}{11}\,Н \approx \frac{50(5+1{,}73)}{11}\,Н \approx \frac{336{,}5}{11}\,Н \approx \cancel{30{,}59\,Н}\ 30{,}6\,Н$.

N 8.

~~Дано:~~



~~По графику~~ видно:
Пусть при $V_0 = 30\,В$ сопротивление лампы равно некоторому R_x.
Тогда мы понимаем, что общее сопротивление цепи: $R_x + R$ ⇒ ток, который проходит по всей цепи равен $\frac{V_0}{R_x+R}$. Тогда напряжение на лампе равно: $\frac{R_x V_0}{R_x+R}$, а ток через неё соответственно равен $\frac{V_0}{R_x+R}$, т.к. при последовательном соединении ток одинаковый через все элементы цепи.

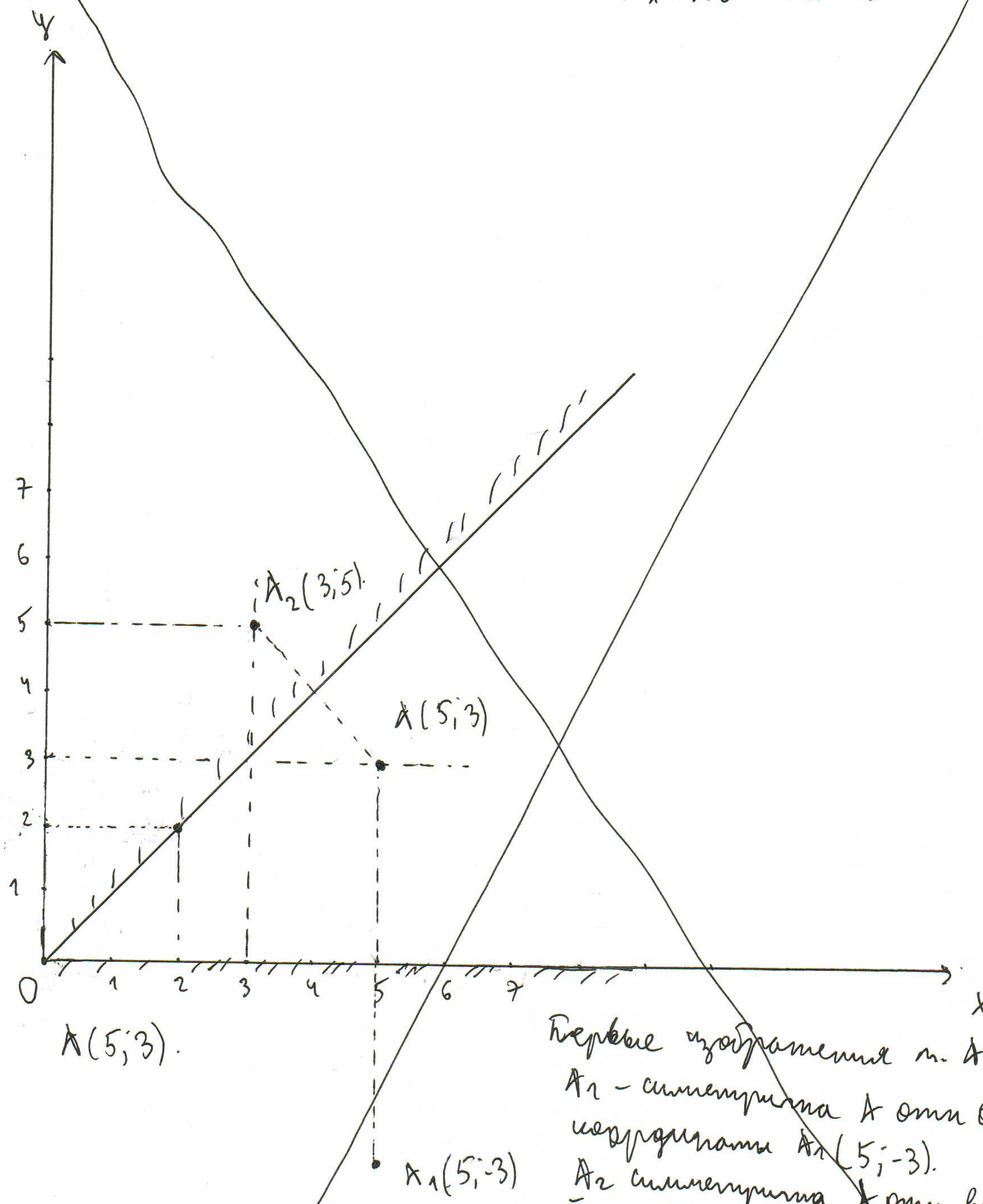
~~Также заметим, что~~ $\cancel{R_x = \frac{U_x}{I_{общ}} = \frac{R_x U_0}{R_x+R_0}}$

~~Так же заметим, что общее напряжение складывается из напряжения на лампе и на резисторе, т.е.:~~ $\cancel{\frac{U_0}{R_x+R_0}}$

$$\cancel{U_0 = U_x + U_R = \frac{R_x U_0}{R_x+R_0} + \frac{U_0 R}{R_x+R_0}}$$

$$\cancel{1 = \frac{R_x}{R_x+R_0} + \frac{R}{R_x+R_0}}$$

№5.



A(5;3).

Первые изображения т. A — это A_1 и A_2.

A_1 — симметрична A отн OX => имеет координаты $A_1(5;-3)$.

A_2 симметрична A отн второго зеркала. т.к. зеркала расположены под углом 45°, то зеркало в нашей ПСК можно задать ур-нием $y = x$. Значит $A_2(3;5)$.

Тогда ответ на 2-й вопрос: $A_1(5;-3)$ и $A_2(3;5)$.

зеркале 2 и мы получаем изображение $A_6(-5;-3)$, которое уже не будет отражаться.

Далее A_2. Такое изображение отражается в зеркале 1 и мы получаем $A_4(3;-5)$; A_4 отражается в зеркале 2 и мы получаем $A_7(-5;3)$. A_7 отражается в зеркале 1 и мы получаем $A_8(-5;-3)$. Но т.к. $A_6(-5;-3)$, то изображения A_8 и A_6 совпадают. Таким образом всего изображений мы получаем 7. Ответ на 1-й вопрос задачи: 7 изображений.

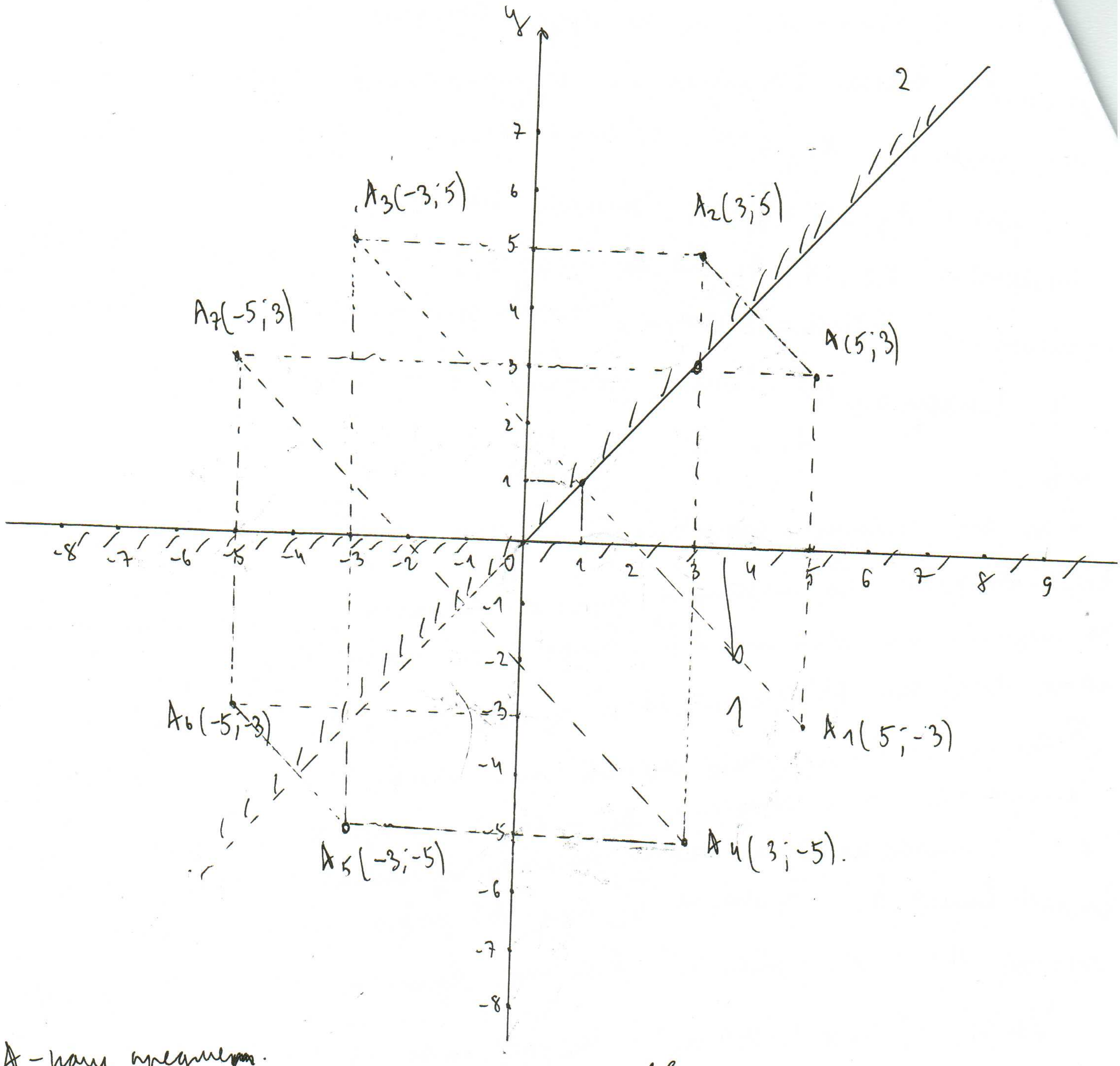
№6.

Т.к. все стержни одинаковые и $\angle ABC = 90^\circ$, то, очевидно, что $ABCD$ — квадрат. По симметрии отн AC скорость точки B направлена по направлению вектора $\vec{BD}$. Тогда, т.к. $ABCD$ — квадрат, а диагонали квадрата являются биссектрисами, то $\angle CBD = 45^\circ$. Так же заметим, что острый угол между BC и AC равен 45° аналогично. Т.к. стержень BC — един, то проекции скоростей $\forall$ его точек на этот самый стержень одинаковые, ~~валя~~ иначе он деформировался бы. Проекция $\vec{V_C}$ на BC равна $V_C \cos 45^\circ$, т.к. угол между BC и AC равен 45°. Так же проекция $\vec{V_B}$ на BC равна $V_B \cos 45^\circ$, т.к. $\angle CBD = 45^\circ$. Из равенства $V_B \cos 45^\circ = V_C \cos 45^\circ$ получаем, что $V_B = V_C \Rightarrow$ скорость $V_B = 5$ м/с.

Ответ: 5 м/с.

№8.

Пусть через цепь идёт некоторый ток I. Тогда напряжение на лампе равно: $U_0 - IR$ по закону сложения напряжений в схеме последовательного соединения. Если через всю цепь ходит ток I, то и через лампу идёт ток I. Значит, если мы хотим получить информацию про напряжение на лампе, а так же ток через цепь нужно найти точку $(U_0 - IR; I) = (30 - 10I; I)$. Заметим, что по графику при $I \geq 2$: $U_x \geq 10$, а так же при $I \leq 2$: $U_x \leq 10$. Для нашей же точки $(30-10I; I$ координата выражена через I: при $I \geq 2$: $U_x \leq 10$, а для $I \leq 2$: $U_x \geq 10$



A — наш предмет.

A_1 — 1-е изображение в зеркале 1, а A_2 — 1-е изображение в зеркале 2. Т.к. зеркало 1 задаётся ур-ем $y=0$, то $\Rightarrow$ т.к. A_1 симметрична A отн такой прямой, то: $A_1(5;-3)$. Т.к. зеркала располагаются под углом 45°, то, очевидно, зеркало 2 задаётся ур-ие $y=x$. Значит $A_2(3;5)$. Тогда Ответ на 1-й вопрос задачи: $A_1(5;-3)$; $A_2(3;5)$.

Заметим, что A_1 отразится в зеркале 2 и мы получим ещё изображение $A_3(-3;5)$, т.к. снова симметрия отн $y=x$. A_3 затем отразится в зеркале 1 и мы получим $A_5(-3;-5)$. И, наконец, A_5 отражается в

чит, ~~для того~~ единственное
рмонтое совпадение достигается при $I = 2$ А.
гда через нашу цепь идёт ток 2 А. Значит V_x (напряжение
на лампе) равно $V_x = V_0 - IR = 30\,В - 10 \cdot 2\,В = 10\,В$.
Тогда выделяемая мощность равная $V_x I = 10\,В \cdot 2\,А = 20\,Вт$.

Ответ: 20 Вт.

61090