Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр ЕИ-55-10-40

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	11	12	11	12	2	8	4	1	61

Вариант 1

1) Пусть наименьшее число из данных нам четырех последовательных чисел – x, тогда следующие числа – $(x+1)$, $(x+2)$, $(x+3)$.

Из условия задачи нам известно, что $(x+2)(x+3)$ на 2022 больше чем $x\cdot(x+1)$. Составим уравнение.

$(x+2)(x+3) - x(x+1) = 2022$

$x^2 + 3x + 2x + 6 - x^2 - x = 2022$

$4x = 2016$

$x = 504$ – первое (наименьшее) число из последовательности, тогда следующие равны 505, 506, 507

Ответ. 504, 505, 506, 507

11

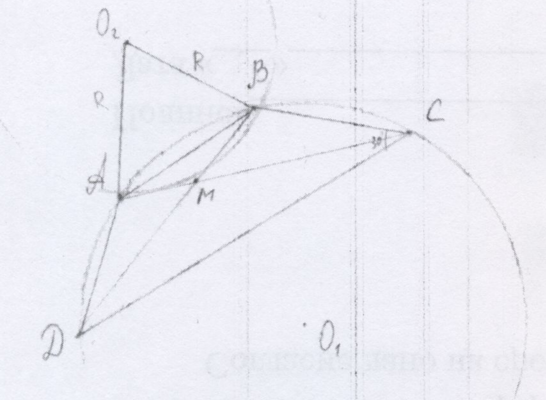
Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр ЕИ-55-10-40

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

2



Дано: $ABCD$ – впис. в $\omega_1(O_1; R_1)$

$AB = BC = 5$

$\angle BCD = 30^\circ$

$AC \cap BD = M$

Найти: R, ω опис. около $\triangle AMB$ $(\omega_2(O_2; R_2))$

Решение:

1) Рассм. $\triangle BDC$ – вписан в $\omega_1(O_1; R_1)$

По следствию из теоремы синусов $2R_1 = \frac{BD}{\sin\angle BCD}$ $\left(\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R\right)$

$\Rightarrow 2R_1 = \frac{BD}{\sin 30^\circ}$ $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2R_1 = 2BD$

$R_1 = BD$

125

$\angle ADB = \angle BAC$ – вписан., $AB = BC$

2) Четырехугольник вписан в окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180°.

$\Rightarrow$ т.к $ABCD$ вписан в окр. $\Rightarrow \angle DAB + \angle BCD = 180^\circ$ $\Rightarrow \angle DAB = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

3) Рассм. $\triangle AMD$

$\angle AMB$ – внешний угол.

Теорема о внешнем угле треугольника: внешний угол треугольника равен сумме двух оставшихся углов треугольника не смежных с этим внешним углом. $\Rightarrow \angle AMB = \angle ADM + \angle DAM$

шифр

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Вариант 1

(продолжение)

(2) $\angle AMB = \angle ADM + \angle DAM$

Пусть $\angle ADM - x$, тогда $\angle DAM - (150 - x)$

$\Rightarrow \angle AMB = x + 150 - x = 150^\circ$

4) Рассм. ΔAMB – вписан в (окр) $\omega_2 (O_2 ; R_2)$

$AB = 5$; $\angle AMB = 150^\circ$

$\Rightarrow 2R_2 = \frac{AB}{\sin 150^\circ} = \frac{5}{\sin 30} = 10$

$R_2 = 5$

Ответ: $R_2 = 5$

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр_______________

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

(3) $\dfrac{n^3 - pn + 1}{n^2 + pn + 2} = a$, где p - простое число, n - целое число;

a - целое число.

$n^2 + pn + 2$ - знаменатель $\Rightarrow n^2 + pn + 2 \neq 0$

$n^2 + 2 \neq -pn$

Рассмотрим различные варианты

1) $a = 0$

$n^3 - pn + 1 = 0$

$n^3 + 1 = pn$

$n = 1$, $p = 2$

2) $a = 1$ - не подходит (по условию), решений нет

$n^3 - pn + 1 = n^2 + pn + 2$

$n^3 - n^2 - 2pn - 1 = 0$

$n = 1 \Rightarrow -2p - 1 = 0$

$-2p = 1$

$p = -\frac{1}{2}$

$n = -1 \Rightarrow 2p - 1 = 0$

$2p = 1$

$p = \frac{1}{2}$

Не подходит по условию (p - должно быть простым)

3) $a = 2$

$n^3 - pn + 1 = 2(n^2 + pn + 2)$

$n^3 - 2n^2 - pn - 2pn + 1 - 4 = 0$

$n^3 - 2n^2 - 3pn - 3 = 0$

$n^2(n-2) = 3(pn+1)$

$\Rightarrow n = -1$, $p = 2$

4) $a = 4$

$n^3 - pn + 1 = 4(n^2 + pn + 2)$

$n^3 - 4n^2 - pn - 4pn + 1 - 8 = 0$

$n^3 - 4n^2 - 5pn - 7 = 0$

$\Rightarrow n = 7$, $p = 4$ - не подходит по усл. (p должно быть простым)

1 б

Ответ: $n_1 = 1$, $p_1 = 2$; $n_2 = -1$, $p_2 = 2$; $n = -3$

нет. −2б

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр________

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

4) $\left(8+\sqrt{65}\right)^{2022}$ – содержит по меньшей мере 2426 девяти после запятой подряд

Определим, на какую цифру оканчиваются числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, в степени 2022.

$0^{2022} \equiv 0 \pmod{10}$

$1^{2022} \equiv 1$

$2^{2022} = 2^{2020} \cdot 2^2 = (2^4)^{505} \cdot 4 = 16^{505} \cdot 4 \equiv 6^{505} \cdot 4 \equiv 6 \cdot 4 = 24 \equiv 4$

$3^{2022} = (3^2)^{1011} = 9^{1011} \equiv (-1)^{1011} = -1 \equiv 9$

$4^{2022} = (-6)^{2022} \equiv 6^{2022} = 6$

$5^{2022} \equiv 5$

$6^{2022} = 6 \equiv 0$

$7^{2022} = (-3)^{2922} = 3^{2022} \equiv 9$

$8^{2022} = (-2)^{2022} = 2^{2022} \equiv 4$

$9^{2022} \equiv (-1)^{2022} = 1^{2022} \equiv 1$

12б

$\left(8+\sqrt{65}\right)^2 \left(8+\sqrt{65}\right)^{1011}$

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

(5) Дано:

$a = 5 м/с^2$

$P_{min} = 1000$ Па

$l = 10$ см

$g = 10 м/с^2$

P_{max} - ?

Решение:

$P = \frac{F}{S} = \frac{10}{0,06} = 166,6$

$S = 6a^2 = 6 \cdot (10^{-1})^2$

$m\vec{a} = \vec{F}_{тр} + \vec{N} + m\vec{g}$

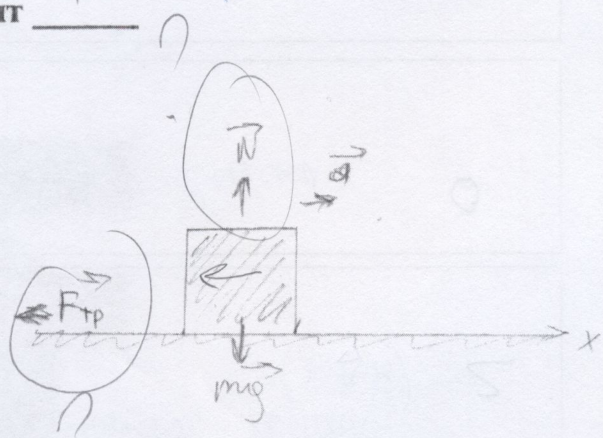
$\rho = \frac{m}{V}$

$m = \rho \cdot V = 1000 \cdot (10^{-1})^3 = 1$ кг

$P = \frac{F}{S} = \frac{ma}{S} = \frac{5P}{0,01} = \frac{1 \cdot 5}{0,01} = 500$

$\underbrace{P = P_0 + P}$ $= 1000 + 500 = 1500$ Па

Ответ: $P_{max} = 1500$ Па



25

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр ______________

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

(6) Дано:

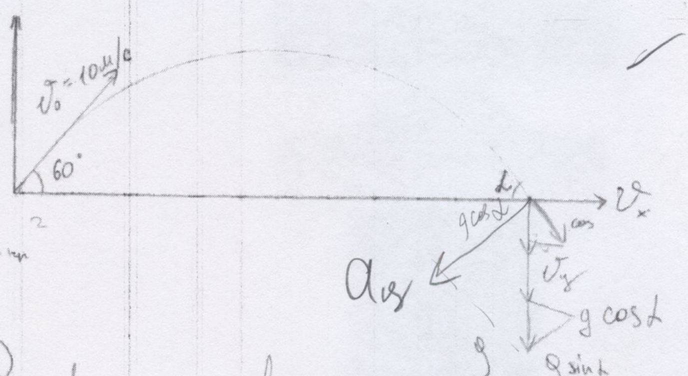
$\alpha = 60^\circ$

$v_{нач_0} = 10 м/с$

$g = 10 м/с^2$

$R_{кр} - ?$

Решение:



2б

$R_{кривизны}$ связан с нормальным ускорением и скоростью. $a_n = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^2}{g\cos\alpha}$

$\vec{a_n} \perp \vec{v}$

$\Rightarrow R_{кр.} = \frac{v^2}{g\cos\alpha} = \frac{100}{10\cos 60} = \frac{100}{10\cdot\frac{1}{2}} = 20 м$

Ответ: $R_{кр.} = 20 м.$

8б

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр____________

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

(7) Дано:

$V = 1,5$ л.

$\Delta t_0 = 5°C$

$t_1 = 2$ мин.

$P = 1,5$ кВт

$c_в = 4200$ Дж/кг·К

$\rho_в = 1000$ кг/м^3

t_2 - ?

СИ

$1,5\cdot10^{-3}$ м^3

120 с.

$1,5\cdot10^{3}$ Вт

Решение: 1

$m_в = \rho\cdot V = 1,5\cdot10^{-3}\cdot1000 = 1,5$кг.

3 $Q = c_в m_в \Delta t_0 = 4200\cdot1,5\cdot5 = 31500$ Дж.

$A = Q = P t_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow t_2 = \frac{A}{P} = \frac{31500}{1,5\cdot10^3} = 21$ с.

Ответ: $t = 21$ с.

4б

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр________________

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

(8) Дано:

$r_1 = 12$ Ом

$r_2 = 20$ Ом

$r_{общ}$ - ?

Решение:

Омметр подключен параллельно ⇒

$$\Rightarrow r_{общ} = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}$$

$$r_{общ} = \frac{12 \cdot 20}{12+20} = \frac{240}{32} = 7{,}5 \text{ Ом}.$$

Ответ: $r_{общ} = 7{,}5$ Ом.

2 б