Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 23-09-04

| Задание | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Всего |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Баллы | 11 | 12 | 13 | 4 | 10 | 15 | 9 | 15 | 89 |

Вариант 1

№1

Дано: $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \dots \cdot 2022$

Очевидно, что надо вычеркнуть все четные: 2; 4; 6; ...; 2022 – это числа арифметической прогрессии $a_1 = 2$ $a_n = 2022$ $d = 2$

Найдём их количество: $2022 = 2 + (n-1)\cdot 2$
$1011 = 1 + n - 1$
$n = 1011$

Ещё надо вычеркнуть числа, которые оканчиваются на 5:
5; 15; 25; ...; 2025 – тоже арифметическая прогрессия

$a_1 = 5$ $a_n = 2015$ $d = 10$

Найдём их количество: $2015 = 5 + (n-1)\cdot 10$
$403 = 1 + 2(n-1)$
$2n = 403 + 1$
$2n = 404$
$n = 202$

Остались числа $1\cdot 3\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot \dots \cdot 2011\cdot 2013\cdot 2017\cdot 2019\cdot 2021$, которые оканчиваются только на 1; 3; 7; 9

Разобьём эти числа на группы по 4 штуки:
$(1\cdot 3\cdot 7\cdot 9)\cdot(11\cdot 13\cdot 17\cdot 19)\cdot \dots \cdot(2011\cdot 2013\cdot 2017\cdot 2019)\cdot 2021$

В каждой группе произведение оканчивается на 9; вычислим количество этих групп по их первым числам 1; 11; ...; 2011 – арифметическая прогрессия

$a_1 = 1$ $a_n = 2011$ $d = 10 \Rightarrow$ $2011 = 1 + (n-1)\cdot 10$
$2010 = 10(n-1)$
$n - 1 = 201$
$n = 202$

Так как групп четное количество, то после их перемножения, произведение будет оканчиваться на 1 и после умножения результата на 2021, – тоже на конце будет 1 $\Rightarrow$ больше вычеркивать не надо.

Вычеркним $1011 + 202 = 1213$ чисел

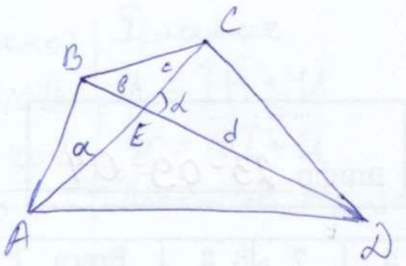
Ответ: 1213

11 б

№2

Дано: ABCD - вып. четыр., $S_{ABD} = 10\ см^2$; $S_{ACD} = 9\ см^2$; $S_{AED} = 6\ см^2$

Найти: $S_{ABCD}$




Решение: 1) По условию $S_{ABD} = 10$; $S_{AED} = 6$

$S_{ABD} = S_{ABE} + S_{AED} \Rightarrow S_{ABE} = 10 - 6 = 4\ см^2$

$S_{ACD} = 9$

$S_{ACD} = S_{CED} + S_{AED} \Rightarrow S_{CED} = 9 - 6 = 3\ см^2$

2) Пусть $AE = a$; $EC = c$; $BE = b$; $ED = d$

$\angle CED = \alpha \Rightarrow \angle BEA = \alpha$ – вертикальные

Тогда $S_{ABE} = \frac{1}{2} ab \sin\alpha$; $S_{CDE} = \frac{1}{2} cd \sin\alpha$

$S_{AED} = \frac{1}{2} ad \sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2} ad \sin\alpha$

$S_{BEC} = \frac{1}{2} bc \sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2} bc \sin\alpha$

3) $\left.\begin{array}{l} S_{ABE} \cdot S_{CDE} = \frac{1}{4} abcd \cdot \sin^2\alpha \\ S_{AED} \cdot S_{BEC} = \frac{1}{4} abcd \cdot \sin^2\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow S_{ABE} \cdot S_{CDE} = S_{AED} \cdot S_{BEC}$

$4 \cdot 3 = 6 \cdot S_{BEC}$

$6 S_{BEC} = 12$

$S_{BEC} = 2\ см^2$

4) $S_{ABCD} = S_{ABE} + S_{BEC} + S_{CDE} + S_{AED} = 4 + 2 + 3 + 6 = 15\ см^2$

Ответ: $15\ см^2$

12б

№3

Пусть $p = q + 1$

Рассмотрим квадратный трёхчлен $x^2 + (p+n)x + q + n = x^2 + (q+1+n)x + q + n$

$a = 1$ $b = q+1+n$ $c = q+n \Rightarrow a + c = b$, тогда $x_1 = -1$

$x_2 = \frac{c}{a} = q + n$ – целое число

всех $q \in \mathbb{Z}$ и

$n = 0; 1; \ldots; 2022 \Rightarrow$

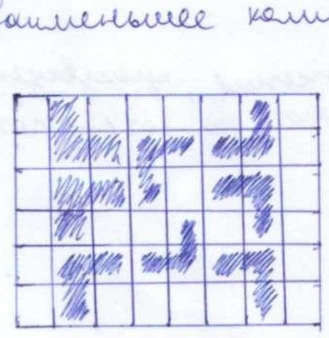
да, существует

Ответ: да

13б

№4

Наименьшее количество уголков – 8, вот пример:



4б

Ответ: 8

№5

Дано:

$\angle\alpha=\angle AOB=45^\circ$

координаты предмета $(5;3)$

$N-?$

координаты первых изображ.

Решение:

Зеркало AO: первое изображение $x=3;\ y=5\ (3;5)$

Зеркало BO: первое изображение $x=5;\ y=-3\ (5;-3)$

$N=\frac{360}{\alpha}-1=\frac{360}{45}-1=7$ изображений

10б

Ответ: 7; (3;5), (5;-3).

№6

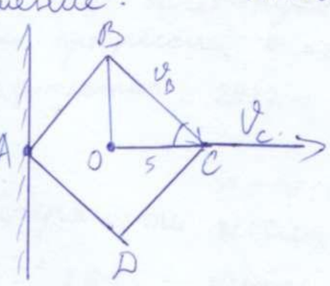
Дано:

$\angle ABC=90^\circ$

$V_C=5$ см/с

$V_B-?$

Решение:




Очевидно, что расстояние BC и AB должно быть постоянным $\Rightarrow \vec{V_B}=\vec{BC}$ (направлена в точку C)

$\Delta BOC: \angle BCO=45^\circ;\ \vec{OC}=\vec{V_C}$

$\cos\angle BCO=\frac{OC}{BC} \Rightarrow \cos 45^\circ=\frac{5}{V_B}$

$V_B=\frac{5}{\cos 45^\circ}=\frac{5\cdot 2}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$ см/с

15б

Ответ: $5\sqrt{2}$ см/с

№7

Дано:

$m=1$ кг

$\mu=0,1$

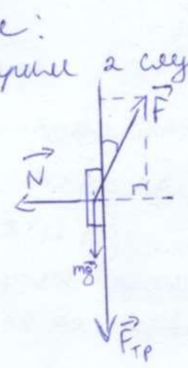
$\alpha=60^\circ$

$F-?$

Решение:

Рассмотрим 2 случая:

I.




$Ox:\ F\sin 60^\circ=N\ \ (F\sin 60^\circ-N=0)$

$Oy:\ F\cos 60^\circ=mg+F_{тр}\ \ (F\cos 60^\circ-mg-F_{тр}=0)$

$F_{тр}=\mu\cdot N=\mu\cdot F\sin 60^\circ$

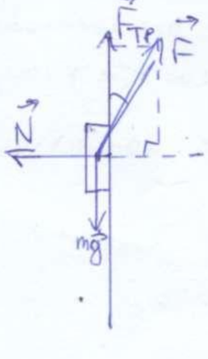
$F\cos 60^\circ=mg+\mu\cdot F\sin 60^\circ$

$0,5F=10+\frac{\sqrt{3}}{20}F$

$\frac{10-\sqrt{3}}{20}F=10$

$F=\frac{200}{10-\sqrt{3}}$ (Н)

II.




$Ox:\ F\sin 60^\circ=N\ \ (F\sin 60^\circ-N=0)$

$Oy:\ F\cos 60^\circ+F_{тр}=mg\ \ (F\cos 60^\circ+F_{тр}-mg=0)$

$F_{тр}=\mu\cdot N=\mu\cdot F\sin 60^\circ$

$F\cos 60^\circ+\mu\cdot F\sin 60^\circ=mg$

$0,5F+\frac{\sqrt{3}}{20}F=10$

$\frac{10+\sqrt{3}}{20}F=10$

$F=\frac{200}{10+\sqrt{3}}$ (Н).

9б

Ответ: $\frac{200}{10+\sqrt{3}}\leqslant F\leqslant\frac{200}{10-\sqrt{3}}$

№8

Дано:
$R = 10\ Ом$
$U_0 = 30\ В$

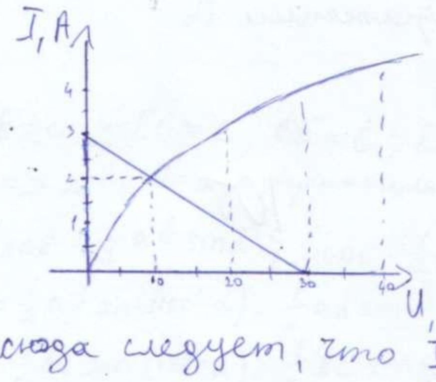
$P - ?$

Решение

$U_0 = IR + U$

$30 = 10I + U$

Покажем эту зависимость на графике




Отсюда следует, что $I = 2А$, $U = 10В$

$P = IU = 2 \cdot 10 = 20\ Вт$

Ответ: $P = 20\ Вт$

15б.