шифр 77-11-37

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	0	0	13	14	10	0	15	10	62

Вариант 1

№1

$2b > 4a + c > 0$

$2b > 0 \Rightarrow b > 0$

$4a + c > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a > 0 \\ c > 0 \end{array}\right. \quad (1)$

$a > -\frac{c}{4}$

1 сл. Пусть $\left[\begin{array}{l} a \le 0 \\ c \le 0 \end{array}\right.$ (одно из, оба быть отрицательными не могут по (1))

Тогда $\left.\begin{array}{l} 4ac \le 0 \\ b^2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow b^2 > 4ac$

2 сл. Пусть $\left\{\begin{array}{l} 4a > 0 \\ c > 0 \end{array}\right.$. Тогда по н-ву Коши

$\frac{4a+c}{2} \ge \sqrt{4ac}$ $\Rightarrow$ $b > \sqrt{4ac} > 0$

При этом $b > \frac{4a+c}{2}$

$b^2 > 4ac$

чтд

№4

$x^2 + 20x + 22 \Rightarrow x^2 + 202x + 2$

Пусть b - коэффициент перед x в квадратном 3-не, а c - свободный член. Тогда для первого трехчлена

$b = 20$ $\quad b - c = -2$

$c = 22$

А для второго

$b = 202$ $\quad b - c = 200$

$c = 2$

Лист 1 из 4

Легко видеть, что изменяя на 1 b или c, мы изменяем на 1 также их разность. И так как эту разность мы можем за 1 шаг изменить только на 1 (неважно, в какую сторону), то эта разность пройдет все значения от -2 до 200 (но не обязательно только их и не обязательно 1 раз). Значит, на каком-либо шаге разность $b-c=1$; $b=c+1$.

Согласно т. Виета, корнями уравнения $ax^2+bx+c=0$ будут являться такие x_1 и x_2, что $\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}\end{cases}$. При этом в нашем случае коэф-т a (старший коэф-т) будет неизменно равен 1, а значит

$$\begin{cases} x_1+x_2=-b \\ x_1x_2=c\end{cases} \qquad \begin{cases} x_1+x_2=-c-1 \\ x_1x_2=c\end{cases}$$

Легко видеть, что тогда корнями будут $-c$ и -1

При этом число c будет целым, т.к. его получают из числа 22 прибавлением или вычитанием единиц, а число -1, очевидно, целое. Т.о., корни $-c$ и -1 удовлетворяют условию.

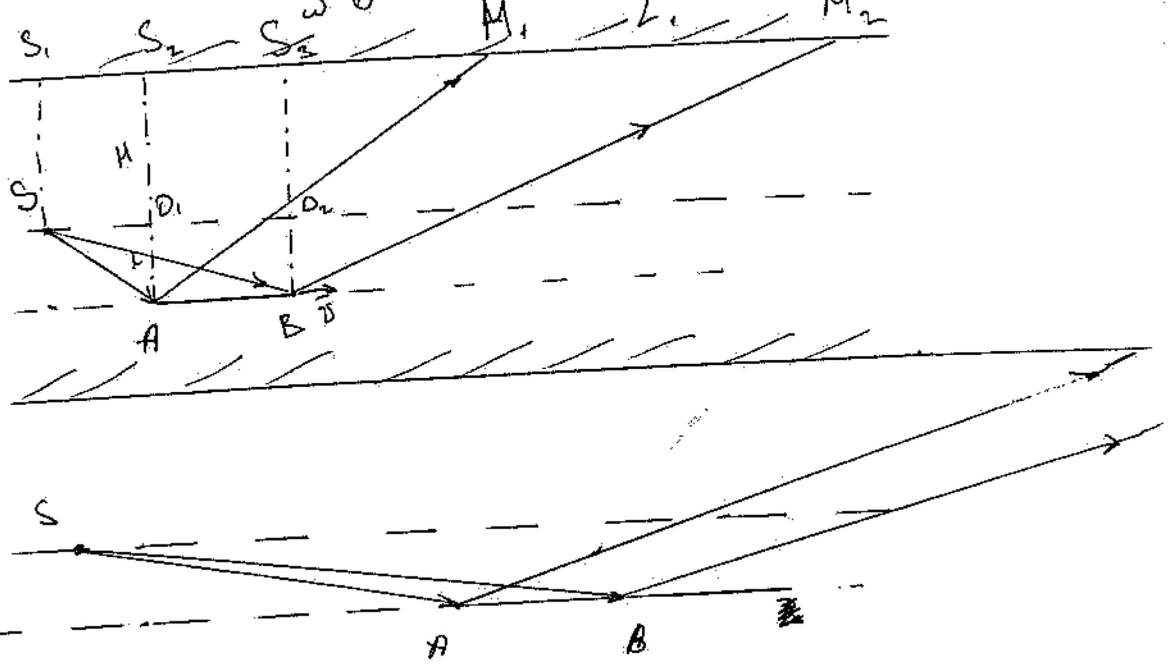
Тогда среди полученных в процессе квадратных трехчленов обязательно есть такой, у которого целые корни. (чтд)

Ответ: да, обоснование выше

№6

Дано:
$H=2$м
$h=1$м
$v=2$ м/с
$SA=2h$
$t=5$с

$\frac{L_1}{L_2}$



Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 77-11-37

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

№2

$$\begin{cases} \sin^4 x + \sin^5 y = 1 \\ \cos^3 x + \cos^7 y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin^5 y = 1 - \sin^4 x \\ \cos^7 y = 1 - \cos^3 x \end{cases}$$

$0 \le \sin^4 x \le 1 \Rightarrow 0 \le \sin^5 y \le 1 \quad y \in [2\pi k; 2\pi k + \pi], k \in Z$

$-1 \le \cos^7 y \le 1 \Rightarrow -1 \le 1 - \cos^3 x \le 1 \quad -2 \le -\cos^3 x \le 0$

$-1 \le \cos^3 x \le 0 \quad x \in [\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k]$

$k \in Z$

?

$1 \le \cos^7 y \le 2$

$\cos^7 y = 1$; $\cos y = 1$; $y = 2\pi k$

$\sin^5 y = 0 \Rightarrow \sin^4 x = 1$

$x \in [\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k]$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \end{array}\right.$$

Ответ: $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \end{array}\right. \\ y = 2\pi k \end{cases}$

шифр 77-11-37

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Вариант 1

Рассмотрим момент времени $t=0$.
Угол падения равен углу отражения, т.к. зеркало и прямая через источник параллельны потолку. Тогда

$\triangle SAO_1 \sim \triangle M_1AS_2$

$$\frac{SO_1}{M_1S_2} = \frac{O_1A}{S_2A} = \frac{h}{H+h} = \frac{1м}{1м+2м} = \frac{1}{3}$$

$SS_1 = SO_1 \quad \frac{SO_1}{S_1M_1} = \frac{1}{4} \quad S_1M_1 = 4SO_1$

$\triangle SBO_2 \sim \triangle M_2BS_3$

$$\frac{SO_2}{S_3M_2} = \frac{O_2B}{S_3B} = \frac{h}{H+h} = \frac{1}{3}$$

$SS_3 = SO_2 \Rightarrow \frac{SO_2}{S_1M_2} = \frac{1}{4}$

$S_1M_2 = 4SO_2$

$M_1M_2 = S_1M_2 - S_1M_1 = 4(SO_2 - SO_1) = 4O_1O_2 = 4AB$

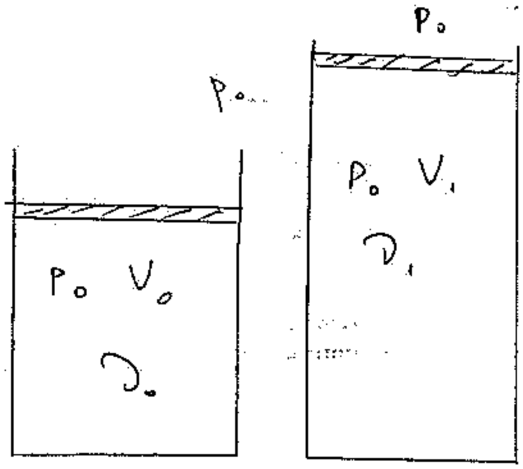
Легко видеть, что через $t=5$ с изменится лишь расстояние до ~~положение~~ зеркала ~~...~~ от источника света, а все остальные параметры сохранятся. Т.к. размер солнечного зайчика при сохраняющихся H и h зависит лишь от размера зеркала AB, а ~~...~~ он останется постоянным, не изменится.
то и размер солнечного зайчика
Ответ: не изменился, т.е. в 1 раз.

№8 +

Дано:
$\nu_0 = 2$ моль
$T_0 = 300$ К
$V_1 = 3V_0$
$\alpha_{\%} = 40\%$

A - ?

$\alpha = \frac{\alpha_{\%}}{100\%} = 0,4$



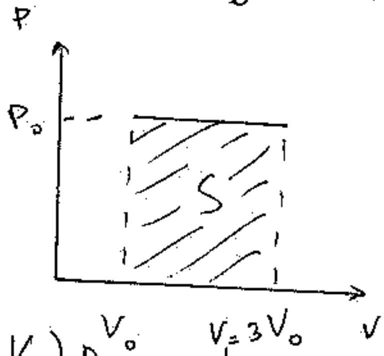
Стенки гладкие, поршень невесомый => давление газа в сосуде равно атмосферному.

$O_2 \to O, O$

Тогда получим, что после процесса $0,4\nu_0$ (моль) превратилось в $2 \cdot 0,4\nu_0$ (моль)

И тогда $\nu_1 = 0,6\nu_0 + 2 \cdot 0,4\nu_0 = 1,4\nu_0$

$P_0V_0 = \nu_0RT_0$



$P_0V_1 = \nu_1RT_1$

$3P_0V_0 = \nu_1RT_1$

$A = S = (V_1 - V_0) \cdot P_0 = (3V_0 - V_0) \cdot P_0 = 2V_0P_0$

$2V_0P_0 = 2\nu_0RT_0$

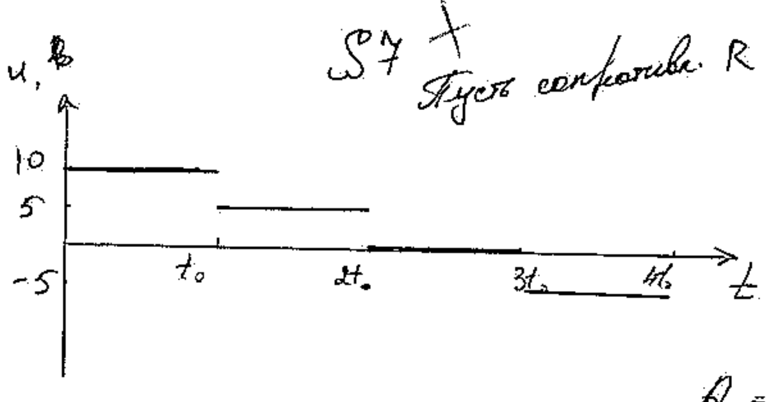
$A = 2\nu_0RT_0 = 2 \cdot 2\text{ моль} \cdot 8,31\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}} \cdot 300\text{ К} = 9972$ Дж

Ответ: 9972 Дж

№7 +

Дано: график

Найти: $U_д$ - ?



Пусть сопротивл. R: $A_1 = U_1 I_1 t_0 = \frac{U_1^2}{R} \cdot t_0$ (з-н Ома, Джоуля)

$A_2 = U_2 I_2 t_0 = \frac{U_2^2}{R} \cdot t_0$

$A_3 = 0$ Дж +

$A_4 = \frac{U_4^2}{R} \cdot t_0$

$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \frac{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2}{R} t_0 = \frac{U^2}{R} \cdot 4t$

$U = \sqrt{\frac{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2}{4}} = \sqrt{\frac{100+25+0+25}{4}}\text{ В} = \frac{\sqrt{150}}{2}\text{ В} \approx 6\text{ В}$

Дано:

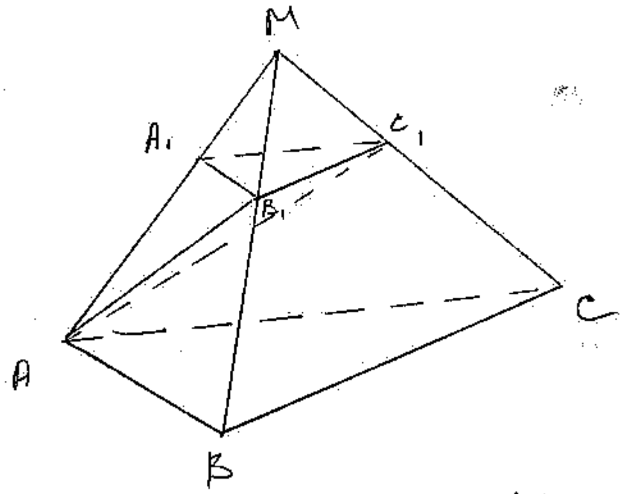
$MABC$ – пирам.

$(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$

$V_{MABC} = 324$

$V_{MA_1B_1C_1} = 96$

$V_{MAB_1C_1}$ – ?



$(A_1B_1C_1) \parallel (ABC) \Rightarrow \dfrac{V_{MABC}}{V_{MA_1B_1C_1}} = k^3$

(все треугольники (стороны пирамид) соответственно подобны с коэф. k, т.к. меньшая пирамида получена отсечением от большей плоскостью, $\parallel$-ной основанию)

Тогда $\dfrac{BC}{B_1C_1} = k$

$$\frac{S_{MCB}}{S_{MC_1B_1}} = k^2$$

$$\frac{V_{MAB_1C_1}}{V_{MABC}} = \frac{S_{MB_1C_1}}{S_{MBC}} = \frac{1}{k^2}$$

$$V_{MAB_1C_1} = \frac{V_{MABC}}{k^2} = V_{MABC} \cdot k^{-2}$$

$$= V_{MA_1B_1C_1} \cdot \sqrt[3]{\frac{V_{MABC}}{V_{MA_1B_1C_1}}} =$$

$$= \sqrt[3]{V_{MABC} \cdot V_{MA_1B_1C_1}^2} =$$

$$= \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^4 \cdot 2^{10} \cdot 3^2} = 16 \cdot 9 = 144$$

Ответ: 144

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 77-11-37

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

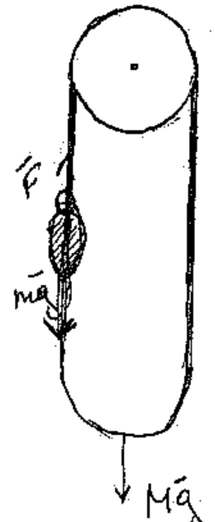
Ответ: действующее напряжение в цепи около 6 В

№5 +

Дано:
$M = 5$ кг
$m = 30$ кг
$t = 2$ с

$N - ?$

$g = 10$ Н/кг



С силой $\overset{N}{F}$ обезьяна тянет веревку в низ. Тогда по III з-ну Ньютона веревка действует на обезьяну. Т.к. обезьяна остается на той же высоте, то $\vec{F} + m\vec{g} = 0$

$F = mg$ (противоположно по направлению)

$N = \frac{A}{t_0} = \frac{F \cdot S}{t_0} = F v$

$v = v_0 + at = at$

$F = \cancel{mg}\ Ma \quad a = \frac{F}{M} \quad v = \frac{F}{M} \cdot t$

$N = \frac{F^2}{M} \cdot t = \frac{(mg)^2}{M} \cdot t$

$N = \frac{(30 \cdot 10\text{Н})^2}{5\text{кг}} \cdot 2\text{с} = 36$ кВт

Ответ: 36 кВт

№3