1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
11	12	0	4	10	15	10	15	77

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Шифр 36/1-09-12

Вар. 1

№1

Заметим, что на последнюю цифру влияют только последние цифры перемножаемых чисел (следует, например, из правила умножения „столбиком")

или если представить $a \cdot b = (10m + c)(10n + d) = \underbrace{\dots}_{\text{ч.n.}} + cd$

Рассмотрим все возможные цифры на конце: (младший порядок)

1) чёт - не может быть, иначе число ЧЁТ ⇒ не 1 (2 4 6 8 0)

т.е. $-\frac{2022}{2} = -1011$ чисел

2) 3 и 7: каждой цифры на конце по 202 (3 7 13 17 23 27 ...)

$3 \cdot 7 = 2\underline{1}$ ⇒ все множители с 3 и 7 в итоге дадут 1, все подходят

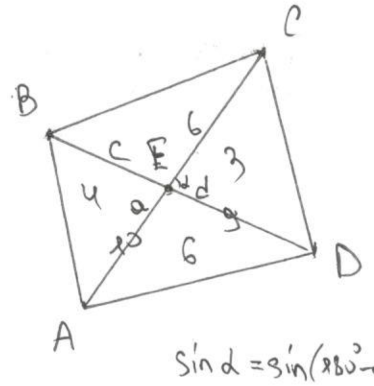
3) 1: $1 \cdot 1 = 1$ - все подходят

4) 5: число с 1 на конце $\not{\vdots}\, 5$ ⇒ все „5" убираем, - 202

5) 9: всего 202, $9 \cdot 9 = 8\underline{1}$ ⇒ можно оставить

Итого вычёркиваем $1011 + 202 = 1213$ множителей

№2



Т.к. $S_{ABD} = S_{ABE} + S_{AED}$ ⇒ $S_{ABE} = 10 - 6 = 4\text{ см}^2$

Аналогично $S_{CED} = 3\text{ см}^2$

Пусть $AE = a$, $EC = b$, ~~BD~~ $BE = c$, $ED = d$

$S_\Delta = \frac{ab\sin\alpha}{2}$ ⇒ Пусть $\angle CED = \alpha$, тогда $\angle AEB = \alpha$, $\angle BEC = \angle AED = 180^\circ - \alpha$ (вертикальные и смежные)

$\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$ ⇒ для всех треугольников $\frac{\sin\alpha}{2} = k$

Получим соотношения:

$$\begin{cases} ack = 4 \ (1) \\ adk = 6 \ (2) \\ bdk = 3 \ (3) \end{cases}$$

(2)/(3): $\frac{adk}{bdk} = \frac{6}{3}$ ⇒ $\frac{a}{b} = 2$ ⇒ $b = \frac{a}{2}$

⇒ $bck = \frac{ack}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$bck = ?$ Тогда $S_{ABCD} = 4 + 6 + 3 + 2 = 15\text{ см}^2$

Ответ: $S_{ABCD} = 15\text{ см}^2$.

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 36/1-09-12

№3 Вар. 1

x^2+px+q $\quad x_1x_2=q \quad x_1+x_2=-p$ (по т. Виета)

$x^2+(p+1)x+q+1$ $\quad x_1x_2=q+1 \quad x_1+x_2=-p-1$

$x^2+(p+2)x+q+2$ $\quad x_1x_2=q+2 \quad x_1+x_2=-p-2$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$x^2+(p+2022)x+q+2022$ $\quad x_1x_2=q+2022 \quad x_1+x_2=-p-2022$

Т.е. сумма корней убывает на 1, произведение увелич. на 1 2022 раза.

Это невозможно, т.к.

№4

Нельзя поместить треугольник (уголок) $\Rightarrow$ в каждом квадрате 2×2 не менее 2 клеток ~~занятых~~ заняты.

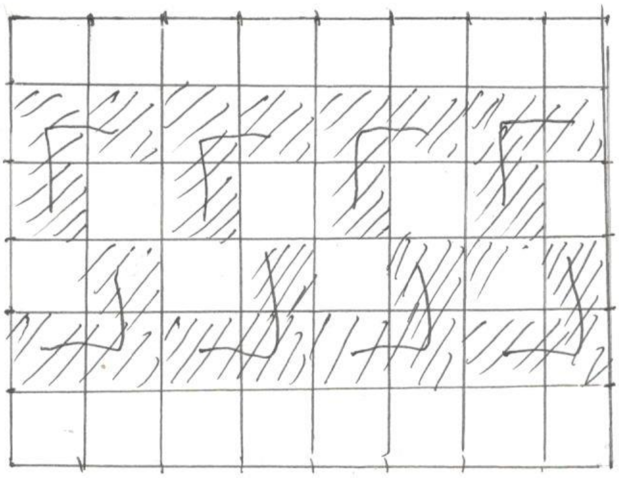
Рассмотрим все такие квадраты: их $5\cdot7=35$ $\Rightarrow$ закр. клеток не менее $2\cdot35=70$

Но мы посчитали ~~все клет~~ закр. клетки в 140 клетках $(35\cdot4)$ $\Rightarrow$ $92=140-6\cdot8$ из них минимум

из 92 не менее 46 было закрашено $\Rightarrow$ всего было не менее $70-46=24$ клетки закрашено

Т.е. треугольников не менее 6.

Пример:



Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

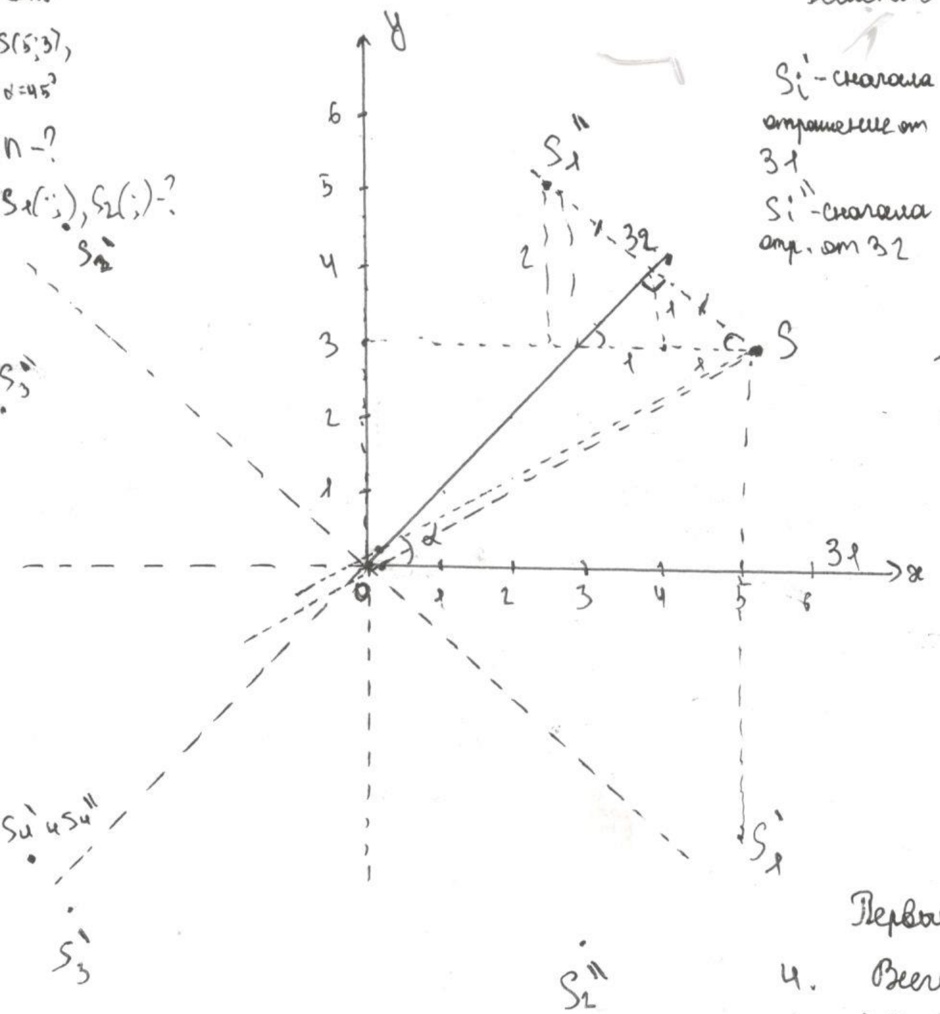
Шифр 36/1-09-12

Вариант 1

№5

Решение

Дано:
S(5;3),
$\alpha = 45^\circ$
n – ?
$S_1(\,;\,), S_2(\,;\,)$ – ?



S_1' – сначала отражение от З1
S_1'' – сначала отр. от З2

Найдём координаты первых изображений (отражаем симметрично от зеркала 1 и 2)

$S_1'(5;-3)$

$S_1''(3;5)$ (из подобия Δ, см. рис.)

~~Последовательно~~, „Распрямим" луч, отражающийся от зеркал:
последовательно будем отражать зеркала друг в друге
Из закона отражения света следует, что при этом длина лучей сохраняется.
Рассмотрим 2 луча: первый падает на З1 очень близко к О, второй на З2 очень близко к О
Первый испытает 4 отражения, второй тоже

4. Всего 8 изображений, но S_4' и S_4'' совпадают ⇒ изображений 7
(совпадают, т.к. $\frac{360^\circ}{45^\circ} = 8$ – делится нацело)

Ответ: (5; -3), (3; 5), 7 изображений

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

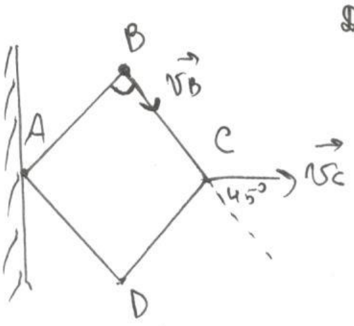
Шифр 36/1-09-12

Вар. 1

№6

Дано: ~~V_C~~ $V_C = 5$ см/с

$\angle ABC = 90^\circ$



Решение

15

Заметим, что B ~~движется~~ по окружности с центром в A $\Rightarrow \vec{V_B} \perp \vec{AB}$ т.е. в данном случае $\vec{V_B}$ напр. по BC. Т.к. BC нерастяжим, то $\vec{V_B}$ и $\vec{V_C}$ в проекции на BC равны $\Rightarrow V_B \cos 0^\circ = V_C \cos 45^\circ \Rightarrow V_B = V_C \cos 45^\circ = 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2{,}5 \cdot 1{,}41 =$ $\approx 3{,}53$ см/с

Ответ: $V_B = 3{,}53$ см/с.

№7

Дано:

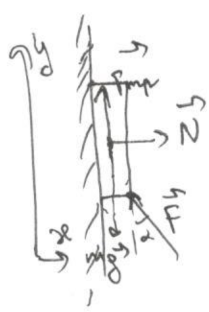
$m = 1$ кг

$\mu = 0{,}1$

$\alpha = 60^\circ$

$F - ?$

Решение



$\vec{mg} + \vec{F_{тр}} + \vec{N} + \vec{F} = 0$

$F_{тр} = \mu N$

$OX: \; N - F\sin\alpha = 0$

$OY: \; F_{тр} - mg + F\cos\alpha = 0$

0

$N = F\sin\alpha \Rightarrow F_{тр} = \mu F \sin\alpha$

$\Rightarrow F(\sin\alpha\,\mu + \cos\alpha) = mg \Rightarrow F = \frac{mg}{\mu\sin\alpha + \cos\alpha}$

$$F = \frac{1 \cdot 10}{0{,}1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{10}{\frac{0{,}1 \cdot 1{,}73}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{10}{0{,}5865} \approx 17H$$

Ответ: $F = 17H$

№8

Дано:

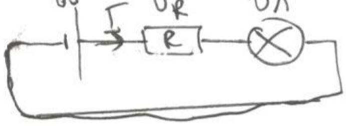
ВАХ лампы

$R = 10\,\Omega$

$U_0 = 30$ В

$P = ?$

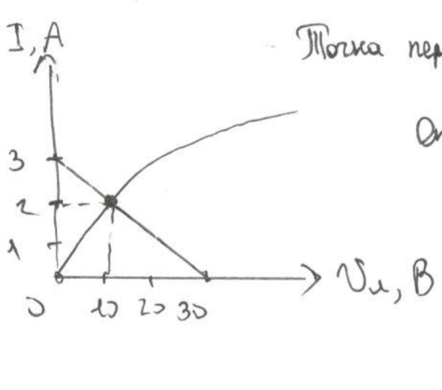
Решение



$U_0 = U_R + U_Л = I \cdot R + U_Л \Rightarrow I = \frac{U_0 - U_Л}{R} = \frac{30B - U_Л}{10\,\Omega} = 3A - \frac{U_Л}{10\,\Omega}$

Т.к. $I_R = I_Л$, ~~проведём~~ построим на ВАХ лампы ВАХ резистора от $U_Л$. В точке пересечения находятся искомый ток и $U_Л$.

I, A	3	0
$U_Л$, B	0	30



Точка пересечения: 10В, 2А; $P = UI = 10 \cdot 2 = 20$ Вт

Ответ: $P = 20$ Вт