шифр 56-11-04

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	10	11	13	6	8	15	6	15	84

Вариант 1

№1 $2b \overset{①}{>} 4a+c>0$ поскольку обе части неотрицательные (более того положительные) возведем неравенство 1 в квадрат, при этом знак не поменяется

$4b^2 > (4a+c)^2$, пусть число 2 (коэф. при b и a) — переменная

тогда полученное н-во примет вид $x^2b^2 > (ax^2+c)^2$

или $a^2x^4 + x^2(2ac-b^2)+c^2<0$ (раскрыли скобки и перенесли в одну часть)

тогда исходное н-во: $f(2)<0$, заметим, что относительно x^2 данное неравенство либо линейное $(a=0)$, либо квадратичное причем $a^2>0 \Rightarrow$ ветки вверх, тогда $f(2)<0 \Leftrightarrow$ что $D>0$

$\Rightarrow$ $a^2x^4+x^2(2ac-b^2)+c^2>0$

$D = 4a^2c^2 - 4b^2ac + b^4 - 4a^2c^2 > 0$ +

$D = b^4 - 4b^2ac > 0 \Rightarrow b^2(b^2-4ac)>0$ т.к. по усл. $b>0 \Rightarrow$

$b^2 - 4ac > 0$ ч.т.д.

если $a=0$, тогда ~~$-b^2x^2 + c^2 < 0$~~ т.д. $b^2 - 4c \cdot 0 > 0$ или $b^2>0$, что очевидно из условия.

№2

$+\begin{cases} \sin^4 x + \sin^5 y = 1 \\ \cos^3 x + \cos^7 y = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \underbrace{\sin^4 x + \cos^3 x}_{\le \sin^2 x + \cos^2 x = 1} + \underbrace{\sin^5 y + \cos^7 y}_{\le \sin^2 y + \cos^2 y = 1} = 2$ ①

?

$\Rightarrow$ ЛЧ ≤ 2, но ЛЧ = ПЧ = 2 $\Rightarrow$ ① $\Leftrightarrow$ (левая часть)

Почему?

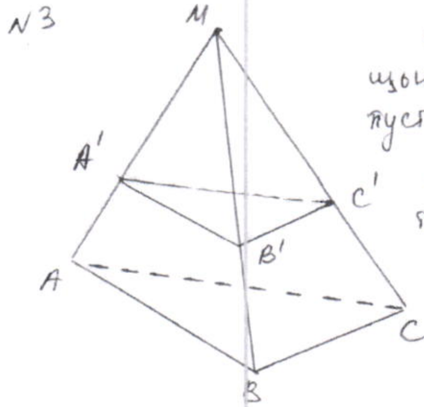
±

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = \pm 1 \\ \cos x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x = 0 \end{cases} \end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin y = 1 \\ \cos y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin y = 0 \\ \cos y = 1 \end{cases} \end{array}\right.$ подставляя данные кандидаты на решения в исходную систему, получаем:

$\begin{cases} \sin x = \pm 1 \\ \cos x = 0 \\ \sin y = 0 \\ \cos y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin y = 1 \\ \cos x = 1 \\ \cos y = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z \\ y = 2\pi k, \ k \in Z \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2\pi m, \ m \in Z \\ y = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, \ l \in Z \end{cases} \end{array}\right.$

Шифр 56-11-04

№3



$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$, т.к. он получен с помощью гомотетии $\triangle ABC$ с центром в т. M

пусть k коэф. подобия, тогда $S_{\triangle A_1B_1C_1} = k^2 S_{\triangle ABC}$

Мысленно опустим высоту из т. M к (ABC) тогда по теореме Фалеса следует, что высота пирамиды $MA_1'B_1'C_1'$ относится к высоте исходной ... как коэф. подобия. $\Rightarrow V_{MABC} = \frac{S_{осн} \cdot h}{3}$

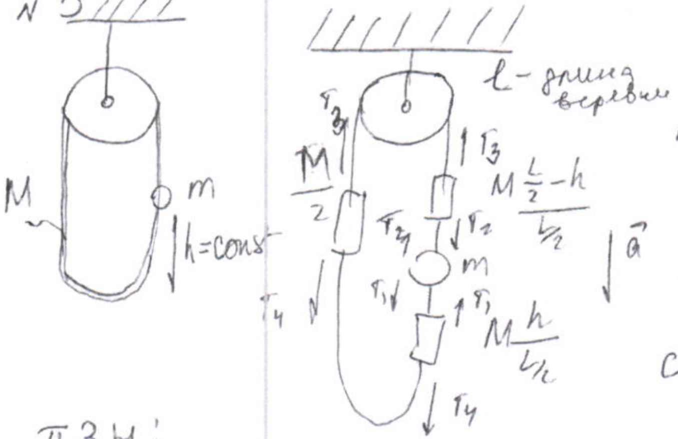
$$V_{MA'B'C'} = \frac{k^2 S_{осн} \cdot kh}{3} = \frac{k^3 Sh}{3}$$

$$\Rightarrow k^3 = \frac{V_{MA'B'C'}}{V_{MABC}} = \frac{96}{324} = \frac{8}{27} \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

тогда $V_{AA'B'C'} = \frac{(1-k)h \cdot k^2 S_{осн}}{3} = k^2(1-k)V_{MABC} = \frac{4}{27} V_{MABC} = 48 \Rightarrow$

$V_{MA'B'C'} = V_{AA'B'C'} + V_{MA'B'C'} = 96+48 = 144$ + Ответ: 144

№5



Разобьем массу веревки как показано на рисунке: для удобства и несильной громоздкости рисунка обозначим только силы натяжения, действующие на каждый груз соотв.

II ЗН:

$$\begin{cases} \frac{Ma}{2} = T_3 - T_4 - \frac{Mg}{2} \\ \frac{M(\frac{l}{2}-h)}{l/2} a = T_2 + \frac{M(\frac{l}{2}-h)}{l/2} g - T_3 \\ mg + T_1 = T_2 \\ M\frac{h}{l/2} a = M\frac{h}{l/2} g + T_4 - T_1 \end{cases} \oplus \Rightarrow \begin{cases} Ma = T_2 - T_3 + T_4 - T_1 + Mg \\ \frac{Ma}{2} - mg = T_3 - T_4 - T_2 + T_1 - \frac{Mg}{2} \end{cases} +$$

$$\frac{3Ma}{2} - \frac{Mg}{2} = mg \Rightarrow a = \frac{2mg + Mg}{3M}$$

$$a = g\left(\frac{1}{3} + \frac{2m}{3M}\right) = \frac{13}{3} g$$

Из закона сложения скоростей: $V_{обм} = V_{веревки}$

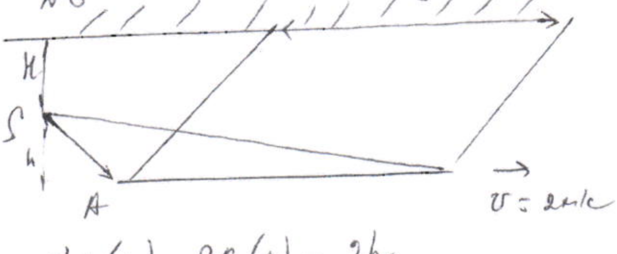
$\Rightarrow V_{об.} = a\tau = \frac{13g\tau}{3}$ $F = F\upsilon = mg \cdot \frac{13g\tau}{3} = \frac{13mg^2\tau}{3} = 26$ кВт шифр 56 - 11 - 04

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

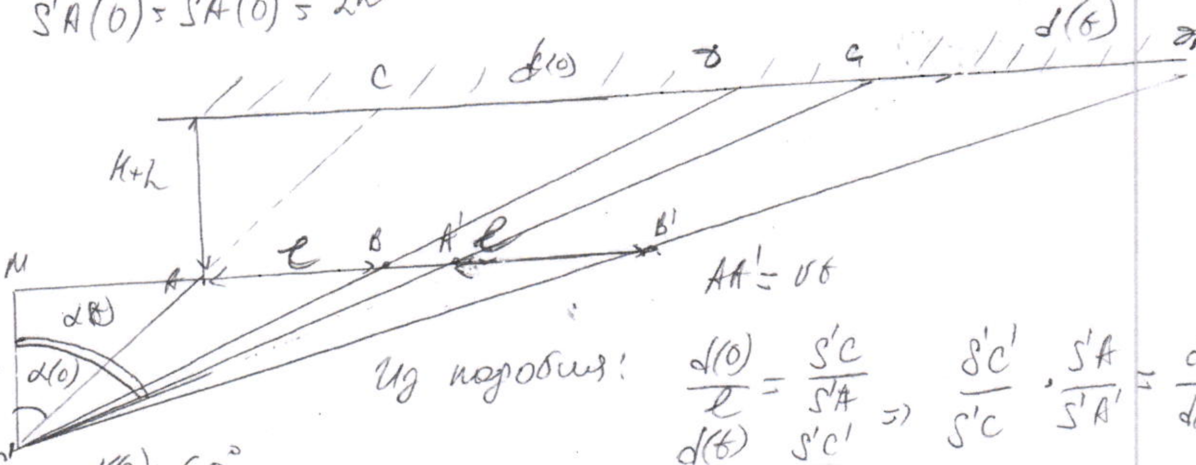
Вариант 1

№6



$$\frac{d(t)}{d(0)} = ?$$

$S'A(0) = SA(0) = 2h$



$AA' = vt$

Из подобия:

$$\frac{d(0)}{l} = \frac{S'C}{S'A} \quad \frac{d(t)}{l} = \frac{S'C'}{S'A'} \Rightarrow \frac{S'C'}{S'C} \cdot \frac{S'A}{S'A'} = \frac{d(t)}{d(0)}$$

$\alpha(0) = 60°$

$AM = \sqrt{3} \cdot h = \sqrt{3}\ м$

$l = 5 \cdot 2 + 10\ м$

$S'A' = \sqrt{(\sqrt{3}+10)^2 + 1} = \sqrt{(\sqrt{3}+10)^2+1}$

$\cos(\alpha(0)) = \frac{1}{2}$

$\cos \alpha(t) = \frac{h}{MA'} = \frac{1}{\sqrt{3}+10}$

$S'C' = \frac{2h+H}{\cos\alpha(t)} = 4(\sqrt{3}+10)$

$S'C = \frac{2h+H}{\cos\alpha(0)} = 4 \cdot 2 = 8$

$S'A = 2$

$$\Rightarrow \frac{d(t)}{d(0)} = \frac{4(\sqrt{3}+10) \cdot 2}{8 \cdot \sqrt{(\sqrt{3}+10)^2+1}} =$$

$$\frac{d(t)}{d(0)} = \frac{\sqrt{3}+10}{\sqrt{(\sqrt{3}+10)^2+1}} \approx 1$$

Ответ: $\frac{d(t)}{d(0)} = 1$

№7

Действующее напряжение в цепи $U_Д = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt}$

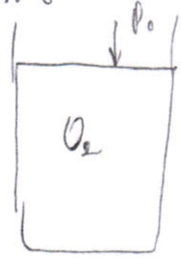
$$\Rightarrow U_Д = \sqrt{\frac{1}{4t_0}\left(\int_0^{t_0} 10^2 dt + \int_{t_0}^{2t_0} 5^2 dt + \int_{2t_0}^{3t_0} 0\, dt - \int_{3t_0}^{4t_0} (-5)^2 dt\right)}$$

$$U_Д = \sqrt{\frac{(100t_0 + 25t_0 + 0 - 25t_0)}{4t_0}} = \sqrt{\frac{100t_0}{4t_0}} = 5\ В$$

Ответ: 5 В.

Шифр 56-11-04

№ 8



$\nu = 2$ моля

T_1 300 K

$\varphi = 40\%$

$A_{газа}$ – ?

$V_2 = 3V_1$

Поскольку 40% – молекул диссоциировали на атомы, кол-во вещества увеличилось на 40%

$\nu_2' = 1{,}4\,\nu_1 = 2{,}8$ моль

Так же, поскольку давление вне не менялось, то и давление внутри тоже постоянно (в силу невесомости вертикального поршня)

$\Rightarrow p_1 = p_2 \Rightarrow \frac{\nu_1 T_1}{\cancel{p_1} V_1} = \frac{\nu_2 T_2}{\cancel{p_2} V_2} \Rightarrow \frac{\nu_1 T_1}{\cancel{V_1}} = \frac{\nu_2 T_2}{3\cancel{V_2}}$

$3\nu_1 T_1 = \nu_2 T_2 \Rightarrow T_2 = \frac{3\nu_1}{1{,}4\,\nu_1} T_1 = \frac{3}{1{,}4} T_1 \approx 643\,K$

$p = const \Rightarrow A = p\Delta V = \nu_2 R T_2 - \nu_1 R T_1 = 8{,}31(3\nu_1 T_1 - \nu_1 T_1)$

$= 8{,}31 \cdot 2\nu_1 T_1 = 9975$ Дж

Ответ: 9975 Дж

№ 4

Пусть после n-ого действия есть $x^2 + a_n x + b_n$ и всего действий m. $\sigma_n = a_n - b_n$. каждое действие меняет значение σ_n на 1 или $|\sigma_n - \sigma_{n+1}| = 1$ Не сравнили с ak

$\sigma_0 = 20 - 22 = -2$ и $\sigma_m = 202 - 2 = 200 \Rightarrow \exists k$, такое что $\sigma_k = 1$

тогда $a_k - b_k = 1 \Rightarrow$ $x^2 + a_k x + b_k = 0$

$x^2 + (b_k + 1)x + b_k = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -b_k \\ x = -1 \end{array}\right.$

+

$\Rightarrow$ Да, существует такой квадратный трехчлен, у которого целые корни