Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр ЕИ-55-11-30

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	10		13	12	10	4	2	10	61

Вариант 1

① $2b > 4a + c > 0$ Доказать: $b^2 > 4ac$

$2b > 0$; $4a + c > 0$

$(2b)^2 > (4a+c)^2$

$4b^2 > 16a^2 + 8ac + c^2$

отнимем от обеих частей $(16ac)$

$4b^2 - 16ac > 16a^2 + 8ac + c^2 - 16ac$

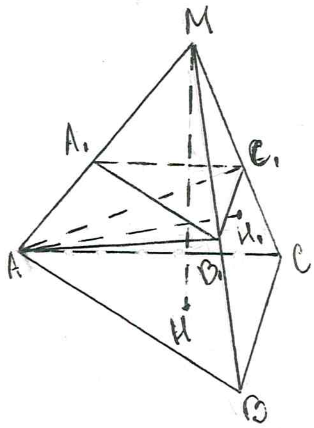
$4(b^2 - 4ac) > 16a^2 - 8ac + c^2$

$4(b^2 - 4ac) > (4a - c)^2$, где $4 > 0$, $(4a-c)^2 > 0$, значит,

$b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow b^2 > 4ac$ ч.т.д.

10б

③



Дано: $V_{MABC} = 324$; $V_{MA_1B_1C_1} = 96$

$(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$

Найти: $V_{MAB_1C_1}$ – ?

Решение:

так как $(A_1B_1C_1) \parallel (ABC) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{V_{MA_1B_1C_1}}{V_{MABC}} = \dfrac{96}{324} = \dfrac{8}{27} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = k^3$, значит, $k = \dfrac{2}{3}$

13б

$\triangle MB_1C_1 \sim \triangle MBC$ (по 2 углам), тогда, $\dfrac{S_{MB_1C_1}}{S_{MBC}} = k^2 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$

$S_{MB_1C_1} = \dfrac{4}{9} \cdot S_{MBC}$

$V_{MABC} = \dfrac{1}{3} S_{MBC} \cdot AH_1$

$V_{MAC_1B_1} = \dfrac{1}{3} S_{MB_1C_1} \cdot AH_1 = \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{1}{3} S_{MBC} \cdot AH_1 = \dfrac{4}{9} V_{MABC} = \dfrac{4}{9} \cdot 324 = 144$

Ответ: 144

④ Известно, что после некоторого числа операций трехчлен преобразован из $x^2+20x+22$ в трехчлен $x^2+202x+2$

Верным является то, что среди полученных в процессе квадратных трехчленов есть такой, у которого будут целые корни, например, $x^2+22x+21=0$

По обратной теореме Виета: $x_1=-21$ $x_2=-1$

Ответ: $x_1=-21$, $x_2=-1$

12б

⑧ Дано:
$\nu_1 = 2$ моль
$T_1 = 300K$
$V_2 = 3V_1$
$p=const$
$A-?$

Решение:
так как сказано, что 40% молекул диссоциировали на атомы, то $\nu_1 - 100\%$
$\nu_2 - 140\%$

$$\nu_2 = \frac{\nu_1 \cdot 140\%}{100\%} = 1{,}4 \cdot \nu_1 = 1{,}4 \cdot 2 \text{ моль} = 2{,}8 \text{ моль}$$

Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона:

1) $pV_1=\nu_1RT_1$
$p=\frac{\nu_1RT_1}{V_1}$

2) $pV_2=\nu_2RT_2$
$p=\frac{\nu_2RT_2}{V_2}$

$\frac{\nu_1RT_1}{V_1}=\frac{\nu_2RT_2}{V_2}$; $T_2=\frac{3\nu_1T_1}{\nu_2}$

$$T_2=\frac{3\cdot 2\text{ моль}\cdot 300K}{2{,}8\text{ моль}} \approx 643K$$

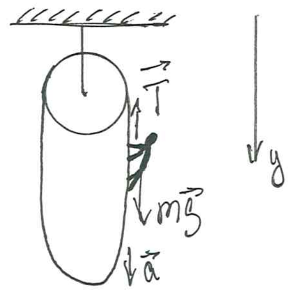
$$A = p\Delta V = pV_2 - pV_1 = \nu_2RT_2 - \nu_1RT_1 = R(\nu_2T_2 - \nu_1T_1) =$$
$$= 8{,}31\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot K}\ (2{,}8\text{ моль}\cdot 643K - 2\text{ моль}\cdot 300K) = 9975{,}324\text{ Дж}$$

Ответ: 9975,324 Дж

10б

⑤ Дано:
$M=5$кг
$m=30$кг
$h=const$
$t=2c$
$N-?$

Решение:



Запишем второй закон Ньютона для обеих свисающих частей веревки

сторона с обезьяной:
$$\frac{Ma}{2}=\frac{Mg}{2}+mg-T \quad (1)$$

без обезьяны:
$$\frac{Ma}{2}=T-\frac{Mg}{2} \quad (2)$$

10б

Сложим (1) и (2):
$Ma=mg$

т.к. $h=const$, следовательно относительно земли обезьяна покоится.

$$N=\frac{A}{t}=\frac{E_K}{t}, \text{ где } E_K=\frac{Mu^2}{2}$$
$$N=\frac{Mu^2}{2t} \quad (3)$$

также, $N=\frac{A}{t}=\frac{FS}{t}=Fu$, где $F=mg$, тогда $N=mgu$ (4)

приравняем (5) = (4)

$$\frac{M v^2}{} = mgv \; ; \quad v = \frac{mgt}{M} \quad (\text{подставим в } (4))$$

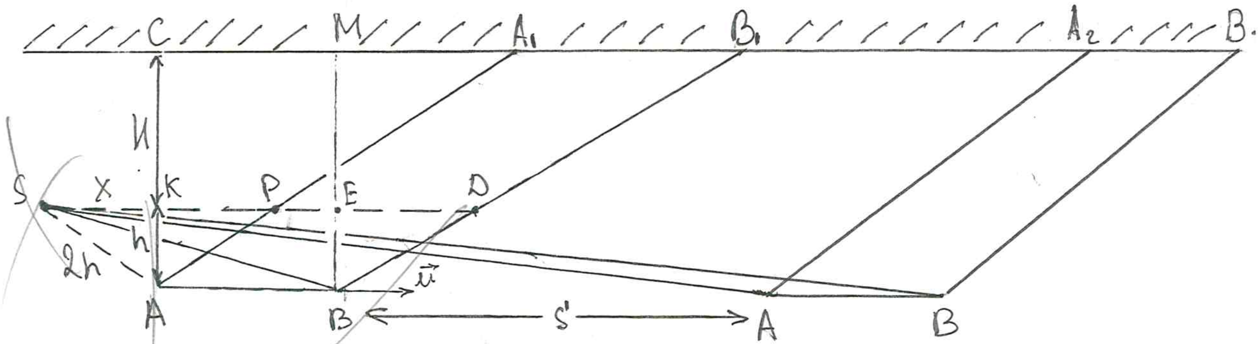
Тогда, $N = \frac{mgt}{M} \cdot mg = \frac{(mg)^2 t}{M}$

$$N = \frac{(30кг \cdot 10\frac{м}{с^2})^2 \cdot 2с}{5кг} = 36\ кВт$$

Ответ: 36 кВт

⑥ Дано:
$H = 2м$
$h = 1м$
S - источник света
AB - зеркало
$v = 2\frac{м}{с}$
$SA = 2h$
$t = 5с$
$\frac{A_2B_2}{A_1B_1}$ - ?

Решение:



Пусть SK это x, тогд найдем x по теореме Пифагора из △SKA: $x = \sqrt{4h^2 - h^2} = h\sqrt{3}$; $SK = KP = h\sqrt{3}$

Так как $\frac{h}{H} = \frac{1}{2}$, то расстояние от зеркала до стены будет 3h

Р/м △ACA_1 и △AKP (подобные)

$\frac{CA_1}{x} = \frac{3h}{h}$; $CA_1 = 3x$

Р/м △BMB_1 и △BED (подобные)

$\frac{ED}{MB_1} = \frac{h}{3h}$; $\frac{x + AB}{CB_1 - AB} = \frac{1}{3}$

$CB_1 - AB = 3x + 3AB$

$CB_1 = 3x + 4AB$

$A_1B_1 = CB_1 - CA_1 = 3x + 4AB - 3x = 4AB$, значит, $A_1B_1 = 4AB$

Найдем расстояние, которое преодолено зеркало за 5с: $S' = vt = 2\frac{м}{с} \cdot 5с = 10м$

Тогда, распишем те же отношения, но для зеркала прошедшего S':

1) $\frac{x + S'}{CA_2 - S'} = \frac{h}{3h}$; $\frac{x + S'}{CA_2 - S'} = \frac{1}{3}$; $CA_2 - S' = 3x + 3S'$
$CA_2 = 3x + 4S'$

2) $\frac{x + S' + AB}{CB_2 - S' - AB} = \frac{h}{3h}$; $\frac{x + S' + AB}{CB_2 - S' - AB} = \frac{1}{3}$; $3x + 3S' + 3AB = CB_2 - S' - AB$
$CB_2 = 3x + 4S' + 4AB$
$A_2B_2 = CB_2 - CA_2 = 3x + 4S' + 4AB - 3x - 4S' =$
$= 4AB$, значит, $A_2B_2 = 4AB$

Тогда, $\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = \frac{4AB}{4AB} = 1$

Ответ: $\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = 1$

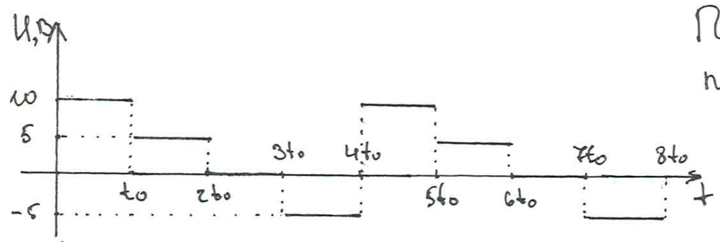
4б

(7) Дано:

$U_{max} = 10В$

$U - ?$

Решение:



По графику можно понять, что ток имеет форму прямоугольного импульса.

Тогда, действующее напряжение зависит от скважности

$U = U_{max}\sqrt{D}$, где $D = \frac{t}{T} = \frac{t_0}{4t_0} = \frac{1}{4}$

$U = 10В\sqrt{\frac{1}{4}} = 5В$

Ответ: 5В

2б