Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 78-11-41 ①

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	10	13	13	14	10	5	7	10	~~82~~

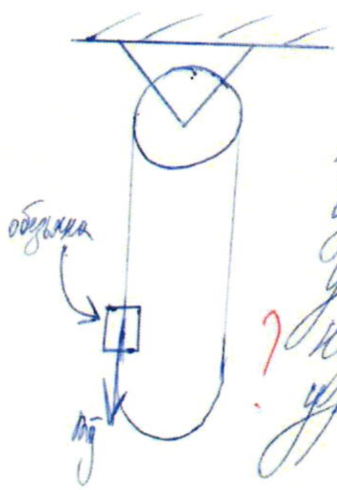
бу измен.

добавить 5 баллов 87

Вариант 2

№5

Дано:
$M = 8$ кг
$m = 20$ кг
$t = 3$ с
P - ?



1) Рассмотрим конструкцию „веревка + обезьяна". Силы натяжения будут внутренними, т.к. веревка по условию закольцована => сила нормальной реакции блока уравновешивает силу тяжести троса. ?

2) По 2 закону Ньютона: $mg = Ma$

$a = \frac{mg}{M} = const$ => движение равноускоренное ✓

$v = at = \frac{mg}{M} \cdot t$

3) По определению:

$P = Fv$ ✓

$F = mg$

$P = \frac{(mg)^2 t}{M} = \frac{(20 \cdot 10)^2 \cdot 3}{8} = 15000$ Вт

Ответ: 15 000 Вт.

10

10 баллов

№8

$V_2 = 2V_1$

$\nu_1 = 4$ моль
$T_1 = 350$ К
A - ?

Дано?

1) Количество вещества увеличилось в 1,6 раза, т.к. 60% молекул диссоциировали на атомы.

$\nu_2 = 1{,}6\,\nu_1 = 1{,}6 \cdot 4 = 6{,}4$ моль ✓

2) Процесс изобарный. Воспользуемся законом Менделеева-Клапейрона:

$PV = \nu RT$

(–) ? ? ? ? ?

$T_2 = \frac{20}{16} T_1 = \frac{20 \cdot 350}{16} = 437{,}5$ К ? ✓

3) $A = p\Delta V$?

ошибка

$A = \nu_2 RT_2 - \nu_1 RT_1 = (6{,}4 \cdot 8{,}31 \cdot 437{,}5) - (4 \cdot 8{,}31 \cdot 350) = 11634$ Дж

Ответ: А = [illegible]

78-11-41 ②

№4

$U_{действ}=U-?$

1) По определению для действ. напряжения:

$$\frac{U_1^2 t_0}{R}+\frac{U_2^2 t_0}{R}+\frac{U_3^2 t_0}{R}+\frac{U_4^2 t_0}{R}=\frac{4U^2 t_0}{R}$$, значит

$$4U^2=U_1^2+U_2^2+U_3^2+U_4^2$$

По графику: $U_1=50$ В; $U_2=100$ В; $U_3=-50$ В; $U_4=50$ В.

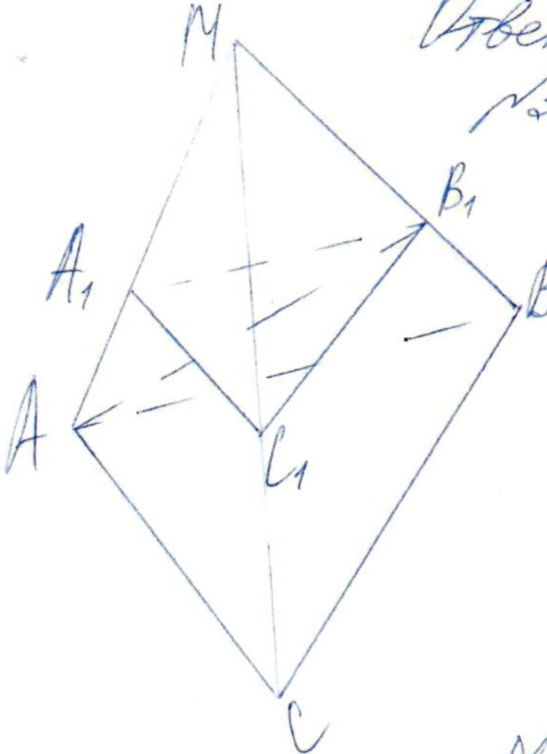
Подставим в формулу:

$$U=\frac{1}{2}\sqrt{U_1^2+U_2^2+U_3^2+U_4^2}=\frac{1}{2}\sqrt{50^2+100^2+(-50)^2+50^2}$$

$U=25\sqrt{7}$ В

Ответ: $25\sqrt{7}$ В. $=?$

7б



№3

1) Пирамиды $MABC$ и $MA_1B_1C_1$ являются гомотетичными, имеют общую точку M и коэффициент $k<1$.

$$\frac{MA_1}{MA}=\frac{MB_1}{MB}=\frac{MC_1}{MC}=k$$

Отношение объемов:

$$k^3=\frac{81}{375}=\left(\frac{3}{5}\right)^3$$

$$k=\frac{3}{5}$$

2) В пирамиде $MABC$ и пирамиде MAB_1C_1 их основания гомотетичные, также они имеют общую высоту из вершины A.

$$\frac{V_{MAB_1C_1}}{V_{MABC}}=\frac{S_{MB_1C_1}}{S_{MBC}}=k^2$$

13

$$V_{MAB_1C_1}=k^2\cdot V_{MABC}=\frac{9}{25}\cdot 375=135 \text{ ед}^3$$

Ответ: $V_{MAB_1C_1}=135$ ед^3

78-11-41 (3)

№1

$3b > 9a + c > 0$

Док., что $b^2 > 4ac$

1) Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(3) = 9a + 3b + c = (9a + c) + 3b > 0$

$f(-3) = (9a + c) - 3b < 0$

10

В квадратном трехчлене получилось два различных значения, значит неравенство имеет два корня => Дискриминант положительный.

2) Если рассматривать случай, где $a = 0$, то $f(x)$ не будет являться квадратным трехчленом. Но т.к. мы знаем, что $b > 0$, значит $b^2 - 4ac > 0$

$b^2 > 0$

ч. и т. д.

Ответ: ч. и т. д.

№2

$$+\begin{cases} \sin^3 x + \sin^4 y = 1 \\ \cos^3 x + \cos^5 y = 1 \end{cases}$$

$\sin^3 x + \sin^4 y + \cos^3 x + \cos^5 y = 2$

$$\begin{cases} \sin^3 x + \cos^3 x \le 1 \quad (A) \\ \sin^4 y + \cos^5 y \le 1 \quad (B) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^3 x + \cos^3 x \le \sin^2 x + \cos^2 x \\ \sin^4 y + \cos^5 y \le \sin^2 y + \cos^2 y \end{cases}$$

$\sin^3 x \le \sin^2 x \quad (1)$

$\cos^3 x \le \cos^2 x \quad (2)$

$\sin^4 y \le \sin^2 y \quad (3)$

$\cos^5 y \le \cos^2 y \quad (4)$

13

Докажем каждый пункт:

(1) $\sin^3 x - \sin^2 x \le 0$

$\sin^2 x(\sin x - 1) \le 0$

($\sin x = 0$ или $\sin x = 1$)

(2) $\cos^3 x - \cos^2 x \le 0$

$\cos^2 x(\cos x - 1) \le 0$

($\cos x = 0$ или $\cos x = 1$)

(3) $\sin^4 y \le \sin^2 y$

$\sin^2 y(\sin^2 y - 1) \le 0$

($\sin y = -1$ или $\sin y = 1$ или $\sin y = 0$

(4) $\cos^5 y - \cos^2 y \le 0$

$\cos^2 y(\cos^3 y - 1) \le 0$

Для того, чтобы система была верной, необходимо чтобы достигались равенства и (A), и (B), а для этого нужно чтобы достигались все равенства (1), (2), (3), (4). В любом случае, x и y кратны $\frac{\pi}{2}$. Рассм на примере (1) и (2):

1) $\sin x = 1, \cos x = 0$ $\quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

78-11-41 ④

$\begin{cases} \sin y = 0 \\ \cos y = 1 \end{cases}$ $\quad y = 2\pi m, m \in Z$

2) $\sin x = 0, \cos x = 1$ $\quad x = 2\pi n, n \in Z$

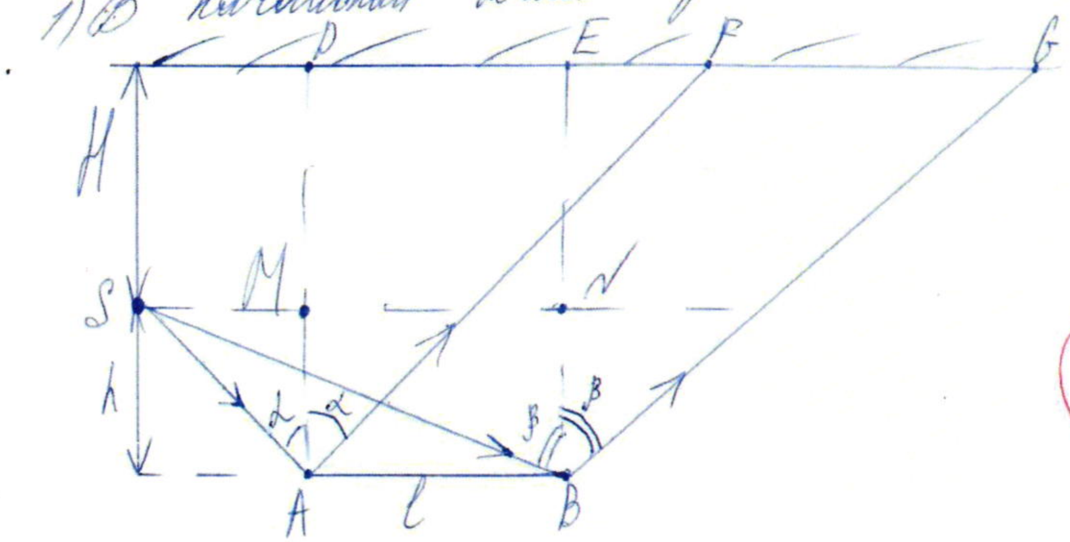
$\begin{cases} \sin y = 1 \\ \cos y = 0 \end{cases}$ $\quad y = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z$

$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ 2\pi m\right) \cup \left(2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi m\right)$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ 2\pi m\right) \cup \left(2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi m\right)$, где m и n действ. целые числа.

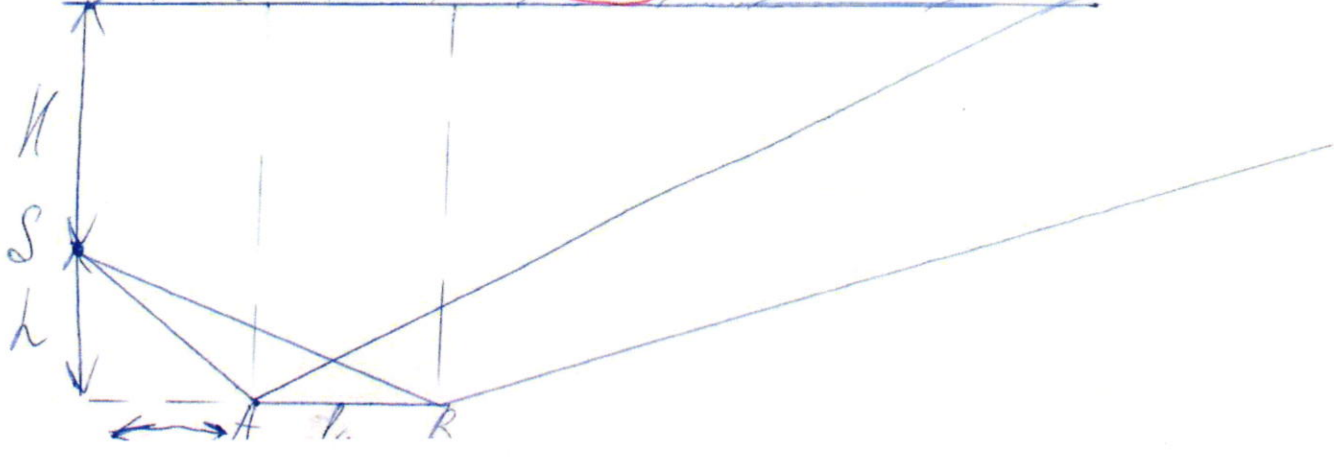
№6

1) В начальный момент времени



5б

2) Через 4 секунды, после того как зайчик отразился на расстоянии $BF = 6$ м $= 6h$



Размеры солнечного зайчика не изменились, поскольку отношение $\frac{L_1}{L_2}=1$, так как основные параметры остаются те же, по закону отражения.

Ответ: параметры не изменились. 78-11-41 5

№4

Будем сопоставлять каждый трехчлен вида x^2-px+q на плоскости $(q;p)$. Заметим, что при $p=q+1$, q целое число, принимающее целые значения.

$$x^2-px+q=x^2-(q-1)x = (x-1)(x-q)$$

14

Такие точки $(q;q+1)$ расположены на прямой обозначенной точками, а точки $(22;20)$ и $(2;202)$ соприкасаются с этой прямой, одна выше, другая ~~ни~~ ниже. График построен ломаной, поэтому в определенный момент времени их пересечение неизбежно. А при пересечении у трехчлена образуются два целых корня.

Ответ: да.