Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Шифр 10100-11-02

Вариант 1

№1

$2b > 4a + c > 0$

$4b^2 > 16a^2 + 8ac + c^2$

$b^2 > 4a^2 + 2ac + \frac{c^2}{4}$

$\left(2a - \frac{c}{2}\right)^2 \geq 0$

$4a^2 - 2ac + \frac{c^2}{4} \geq 0$

$4a^2 + \frac{c^2}{4} \geq 2ac$

$b^2 > 4a^2 + 2ac + \frac{c^2}{4} \geq 4ac$

$b^2 > 4ac$ ч. т. д.

+

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
10	13	13	10	10	15	8	15	94

№2

$\begin{cases} \sin^4 x + \sin^6 y = 1 \\ \cos^7 x + \cos^7 y = 1 \end{cases}$

$(\sin^4 x + \cos^7 x) + (\sin^6 y + \cos^7 y) = 2$

$\sin^4 x \leq \sin^2 x$

$\cos^7 x \leq \cos^2 x$

$\sin^6 y \leq \sin^2 y$

$\cos^7 y \leq \cos^2 y$

+

$(\sin^4 x + \cos^7 x) + (\sin^6 y + \cos^7 y) \leq \sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 y + \cos^2 y$

$(\sin^4 x + \cos^7 x) + (\sin^6 y + \cos^7 y) \leq 2$

Значит $\sin^4 x + \cos^7 x + \sin^6 y + \cos^7 y = 2$ при

$\begin{cases} \sin^4 x = \sin^2 x \\ \cos^7 x = \cos^2 y \\ \sin^6 y = \sin^2 y \\ \cos^7 y = \cos^2 y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x(\sin^2 x - 1) = 0 \\ \cos^2 x(\cos^5 x - 1) = 0 \\ \sin^2 y(\sin^4 y - 1) = 0 \\ \cos^2 y(\cos^5 y - 1) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=-1\\ \sin x=1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\sin y=1\\ \sin y=0\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\cos y=1\\ \cos y=0\end{array}\right.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\sin y=1\\ \cos y=1\end{array}\right.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z\\ x=2\pi n\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}y=\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in Z\\ y=2\pi m,\ \cancel{m\in Z}\end{array}\right.\end{cases}$$

– единственно возможные ~~корни~~. решения.

~~Ответ: $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi m\right)$, $n\in Z$~~

$m\in Z$

$\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\ 2\pi m\right)$

~~$\left(2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi m\right)$~~

~~$\left(2\pi n;\ 2\pi m\right)$~~

При $\cos x=0$:

$$\begin{cases}1+\sin^5 y=1\\ 0+\cos^7 y=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin^5 y=0\\ \cos^7 y=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sin y=0\\ \cos y=1\end{cases} \Rightarrow \cos y=1$$

При $\cos x=1$:

$$\begin{cases}0+\sin^5 y=1\\ 1+\cos^7 y=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sin^5 y=1\\ \cos^7 y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sin y=1\\ \cos y=0\end{cases} \Rightarrow \sin y=1$$

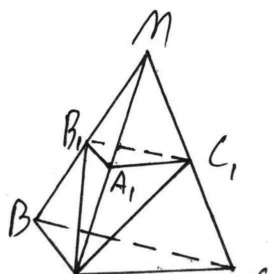
Получим решения:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x=0\\ \cos y=1\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x=1\\ \sin y=1\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z\\ y=2\pi m,\ m\in Z\end{cases}\\ \begin{cases}x=2\pi n,\ n\in Z\\ y=\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in Z\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\ 2\pi m\right)$ $n\in Z,\ m\in Z$;

$\left(2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi m\right)$

№ 3



$MABC$ – ~~пр~~ пирамида

$B_1A_1C_1 \parallel BAC$

$V_{MABC}=324$

$V_{MA_1B_1C_1}=96$

$V_{MAB_1C_1}$ – ?

Пусть $\frac{MB}{MB_1}=k$, тогда

$\frac{V_{MABC}}{V_{MA_1B_1C_1}}=k^3$ и $\frac{S_{MBC}}{S_{MB_1C_1}}=k^2$

Пусть h – высота проведённая из точки A на плоскость MBC.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Шифр Ю100-11-02

Тогда $V_{MABC} = \frac{1}{3}h \cdot S_{MBC}$

$V_{MAB_1C_1} = \frac{1}{3}h \cdot S_{MB_1C_1}$

$$\frac{V_{MAB_1C_1}}{V_{MABC}} = \frac{1}{k^2} \quad V_{MAB_1C_1} = \frac{V_{MABC}}{k^2} = V_{MA_1B_1C_1} \cdot k$$

$$k = \sqrt[3]{\frac{V_{MABC}}{V_{MA_1B_1C_1}}} = \sqrt[3]{\frac{324}{96}} = \sqrt[3]{\frac{3^4 \cdot 2^2}{2^5 \cdot 3}} = \frac{3}{2}$$

$$V_{MAB_1C_1} = 96 \cdot \frac{3}{2} = 144$$

+

Ответ: 144

№4

Уравнение $ax^2+bx+c=0$, если $b=a+c$ имеет корни -1 и $-\frac{c}{a}$.

Следовательно уравнение $x^2+bx+c=0$, если $b=c+1$ имеет ~~кр~~ корни -1 и $-c$.

$x^2+20x+22$ ~~20~~

$b=20$
$c=22$ $\Rightarrow b<1+c$

$x^2+202x+2$ $\Rightarrow b>1+c$
$b=202$
$c=2$

±

т.к. b и c могут меняться за одно действие только на 1, то между двумя этими трёхчленами встретится ~~такой тре~~ как минимум 1 такой трехчлен, у которого $b=1+c$, следовательно такой ~~данный~~ трёхчлен будет иметь корни -1 и $-c$, где $c \in \mathbb{Z}$, значит его корни будут целыми числами. Ответ: среди полученных в процессе квадратных трёхчленов есть такой, у которого целые корни.

№5

Т.к. обезьяна удерживается на одной высоте, значит сумма действующих сил на обезьяну равна 0:

$mg + F = 0$

А на верёвку действует сила: $\cancel{mg} - F = mg$.

$\cancel{F=M}\ mg = Ma$

$a = \frac{mg}{M}$ – ускорение верёвки.

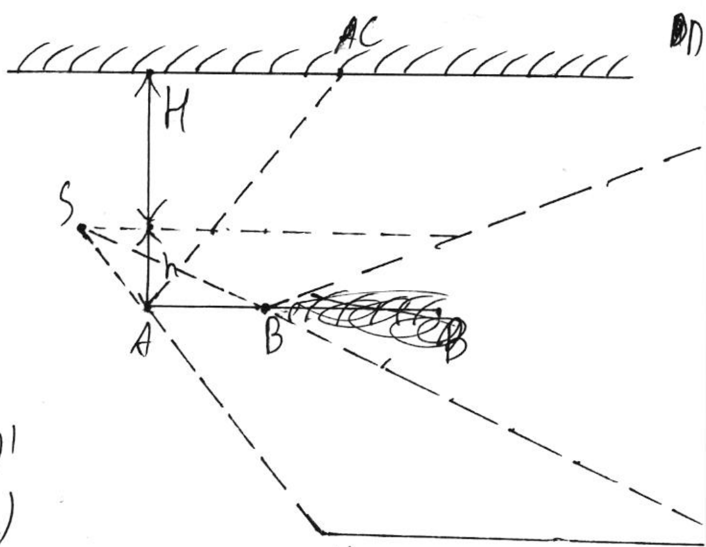
При $t=0$ скорость верёвки $V=0$, ~~тогд~~ значит $V(t) = at = \frac{mg}{M}t$.

Мощность развиваемая обезьяной равна:

$P = mgV = \frac{m^2g^2t}{M} = \frac{30^2 кг^2 \cdot 100 м^2/с^4 \cdot 2с}{5 кг} = 36000 Вт = 36 кВт$

Ответ: 36 кВт

№6



Обозначим границы солнечного зайчика точками C и D.

Отразим CD относительно прямой AB и назовём получившуюся прямую C'D'.

Т.к. $AB \parallel C'D'$, то $\angle SAB = \angle SC'D'$ (как соответственные углы)

Значит $\Delta SAB \sim \Delta SC'D'$ (по 2 углам).

Значит отношение $\frac{AB}{C'D'}$ равно отношению высот данных треугольников. Высота $\Delta SAB = h$, высота $\Delta SC'D' = h + (h+H) = 2h+H$. Значит $\frac{AB}{CD} = \frac{AB}{C'D'} = \frac{h}{2h+H}$

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Шифр ЮО100-11-02

$CD = \frac{2h+H}{h} \cdot AB$. Следовательно размеры солнечного зайчика не зависят от расположения ~~к~~ зеркала AB.

Ответ: 1

№7

Действующее напряжение определяется по среднеквадратичному всех значений

$$U_{действ} = \sqrt{\frac{(10^2 t_0)^2 + (5^2 t_0) + 0^2 t_0 - 5^2 t_0}{4t_0}} = \sqrt{\frac{10^2 + 5^2 - 5^2}{4}} = 5\ B$$

Ответ: 5В

№8

Данный процесс изобарный следовательно:

$pV = \nu RT$

$A = p\Delta V = \nu_2 RT_2 - \nu_1 RT_1$

Т.к. 40% молекул диссоциировали, то количество вещества увеличилось на 40%: $\nu_2 = 1{,}4\nu_1 = 2{,}8$ моля

$T_1 = \frac{pV_1}{\nu_1 R}$ — начальная температура

$T_2 = \frac{pV_2}{\nu_2 R}$ — конечная температура

$\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2 \nu_1}{V_1 \nu_2} = \frac{3 \cdot 1}{1 \cdot 1{,}4}$ $\quad T_2 = T_1 \cdot \frac{3}{1{,}4} \approx 642{,}86\ K$

$A = 2{,}8 \cdot 8{,}31 \cdot 642{,}86 - 2 \cdot 8{,}31 \cdot 300 \approx 9972$ Дж

Ответ: 9972 Дж.