Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 78-11-34

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	10	13	13	0	10	15	10	15	86

без измен-ний

Вариант 1

без изменений

№1

Известно, что $2b > 4a + c > 0$. Докажите, что $b^2 > 4ac$

$2b > 4a + c > 0 \Rightarrow b > 2a + \frac{c}{2} > 0 \Rightarrow b^2 > (2a + \frac{c}{2})^2 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2 > 4a^2 + \frac{c^2}{4} + 2ac$ (1)

10

Докажем, что $4a^2 + \frac{c^2}{4} \geq 2ac \Leftrightarrow 16a^2 + c^2 \geq 8ac \Leftrightarrow$

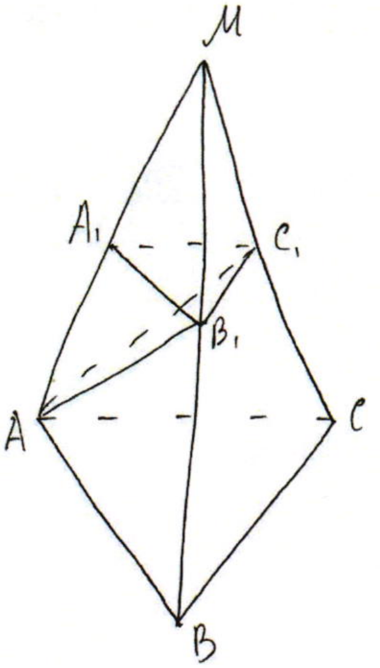
$\Leftrightarrow 16a^2 + c^2 - 8ac \geq 0 \Leftrightarrow (4a - c)^2 \geq 0$ – верное неравенство.

(1) $b^2 > 4a^2 + \frac{c^2}{4} + 2ac$; так как $4a^2 + \frac{c^2}{4} \geq 2ac$, то $b^2 > 2ac + 2ac$

$b^2 > 4ac$

ч.т.д.

№3



Дано:

$MABC$ – пирамида

$(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$

$A_1 \in MA$

$B_1 \in MB$

$C_1 \in MC$

$V_{MABC} = 324$

$V_{MA_1B_1C_1} = 96$

Найти: $V_{MAB_1C_1}$

13

Решение:

$\frac{V_{MABC}}{V_{MA_1B_1C_1}} = \frac{324}{96} = \frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$, так как $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$, то $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{BM}{B_1M} = \frac{3}{2} =$

$\triangle MB_1C_1 \sim \triangle BMC$

$\Rightarrow \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{B_1M}{BM} = \frac{2}{3}$

Пирамида $MABC$ разбита на пирамиды AMB_1C_1 (основание $\triangle MB_1C_1$, вершина A) и AB_1C_1CB (основание трапеция BB_1C_1C, вершина A). У обеих пирамид одна и та же высота равная $\rho(A;(BMC))$. Тогда

$\frac{V_{AMB_1C_1}}{V_{ABB_1C_1C}} = \frac{S_{MB_1C_1}}{S_{BB_1C_1C}}$, так как $\triangle B_1MC_1 \sim \triangle BMC_1$, то $S_{\triangle MB_1C_1} = \frac{4}{9} S_{\triangle BMC}$

$\Rightarrow S_{BB_1C_1C} = \frac{5}{9} S_{\triangle BMC} \Rightarrow \frac{S_{\triangle MB_1C_1}}{S_{BB_1C_1C}} = \frac{4}{9} : \frac{5}{9} = \frac{4}{5}$

$\frac{V_{AMB_1C_1}}{V_{ABB_1C_1C}} = \frac{4}{5}$; $V_{AMB_1C_1} = \frac{4}{9} V_{MABC} = \frac{4}{9} \cdot 324 = 144$

Ответ: 144

№2

Решить $\begin{cases} \sin^4 x + \sin^5 y = 1 & (1) \\ \cos^3 x + \cos^7 y = 1 & (2) \end{cases}$

Из (2) следует, что $\cos x \geq 0$, $\cos y \geq 0$, при этом они не могут быть равны 0 одновременно.

Из (1): если $\sin x = \pm 1$, то $\sin^5 y = 0$, т.е. $\sin y = 0$. Тогда $\cos y = 1$, т.е. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ y = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Если $\sin x = 0$, то $\sin^5 y = 1$, след. $\sin y = 1$. Тогда $\cos y = 0$, $\cos x = 1$

Получаем $\begin{cases} x = 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Докажем, что других решений нет.

1) Пусть $\begin{cases} -1 < \sin x < 1 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$ (*). Тогда $\sin^4 x < \sin^2 x$, след. из

$\sin x + \sin y = 1$ получаем $\underbrace{\sin x + \sin y}_{=1} < \sin x + \sin y$,

$\underbrace{1 - \sin^2 x}_{\cos^2 x} < \sin^5 y$, тогда $\cos^2 x < \sin^5 y$

Из (*) след. $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ -1 < \cos x < 1 \end{cases}$, тогда $\cos^3 x < \cos^2 x < \sin^5 y$

$\cos^3 x < \sin^5 y$, т.е.

$\sin^5 y - \cos^3 x > 0$

Из (1) и (2) следует $\sin^4 x + \sin^5 y = \cos^3 x + \cos^7 y$;

$\underbrace{\sin^5 y - \cos^3 x}_{>0} = \cos^7 y - \sin^4 x$

Тогда $\cos^7 y - \sin^4 x > 0$

$\underbrace{\sin^4 x + \sin^5 y}_{=1} < \sin^4 x + \sin^5 y$, т.к. при выполнении условия $-1 < \sin x <$

выполняется $0 < |\sin y| < 1$, след. $1 < \sin^2 y + \sin^4 x$; $\underbrace{1 - \sin^2 y}_{\cos^2 y} < \sin^4 x \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^7 y < \cos^2 y < \sin^4 x \Rightarrow \sin^4 x - \cos^7 y > 0$

$\sin^4 x + \sin^5 y = \cos^3 x + \cos^7 y$

$\underbrace{\sin^4 x - \cos^7 y}_{>0} = \cos^3 x - \sin^5 y$, то $\cos^3 x - \sin^5 y > 0$

$\sin^5 y - \cos^3 x < 0$, получили противо-

речие с ранее доказ. $\sin^5 y - \cos^3 x > 0$. Таким образом $|\sin x| = 1$; $\sin y = 0$

$\Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow \cos y = 1$ $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ y = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

13

) Аналогично доказываем 2-ой случай, при условии $\begin{cases} -1 < \sin y < 1 \\ \sin y \neq 0 \end{cases}$ невозможно

т.е. система не имеет решения. Тогда $\sin y = 1$, $\sin x = 0$, $\cos y = 0$, $\cos x = 1$,

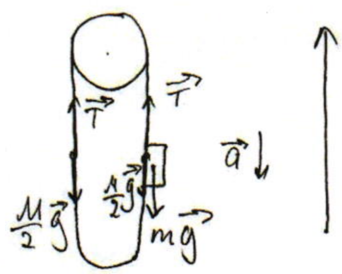
откуда $\begin{cases} x = 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$ Ответ: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ y = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$; $\begin{cases} x = 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$

№5

Дано:
М = 5 кг
ı = 30 кг
 = 2 с
ысота
безьянки
остоянная
' - ?

Решение:

1)



2) Второй з-н Ньютона для левой половины верёвки

$$\vec{T} + \frac{M\vec{g}}{2} = \frac{M}{2}\vec{a}$$

$$O_y:\ T - \frac{Mg}{2} = \frac{M}{2}a \quad (1)$$

3) Второй з-н Ньютона для правой половины верёвки

$$\vec{T} + \frac{M\vec{g}}{2} + m\vec{g} = \frac{M}{2}\vec{a}$$

$$O_y:\ T - \frac{Mg}{2} - mg = -\frac{M}{2}a \quad (2)$$

4) Вычтем из уравнения (1) уравнение (2)

Получим $mg = Ma$

$$a = \frac{mg}{M} \quad (3)$$

) Для нахождения мощности развиваемой обезьянкой через две секунды после начала движения воспользуемся формулой мгновенной мощности $P = F \cdot v$

) Высота обезьянки постоянна => $F = mg$ (5)

) Скорость верёвки через время t

$$\left.\begin{aligned} v &= at \\ a &= \frac{mg}{M} \end{aligned}\right\} \Rightarrow v = \frac{mg}{M}t \quad (6)$$

) (5) и (6) подставим в (4)

$$P = \frac{(mg)^2 t}{M} = \frac{(30 \cdot 10)^2 \cdot 2}{5} = 36000 \text{ Вт} = 36 \text{ кВт}$$

Ответ: $P = \frac{(mg)^2 t}{M} = 36$ кВт

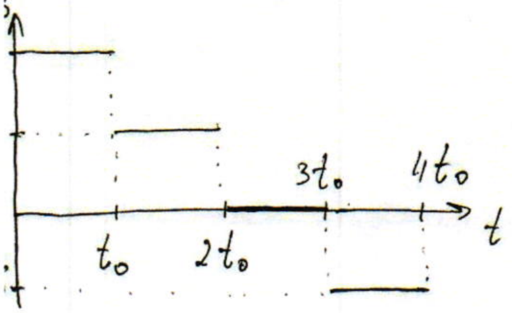
10

Шифр 78-11-34

Дополнительный лист

№7

Дано:



айти:

U_g

Ответ: 6,1 В

Решение:

Действующим значением напряжения переменного тока называют такое значение постоянного напряжения, которое выделяет такое же количество теплоты.

$$Q = \frac{U_g^2}{R} \cdot 4t_0 = \frac{U_1^2}{R}t_0 + \frac{U_2^2}{R}t_0 + \frac{U_3^2}{R}t_0 + \frac{U_4^2}{R}t_0$$

$$U_g = \sqrt{\frac{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2}{4}}$$

$$U_g = \sqrt{\frac{10^2 + 5^2 + (-5)^2}{4}} = \frac{\sqrt{150}}{2} = \frac{10\sqrt{1,5}}{2} = 5\sqrt{1,5} =$$

$$= 6,1\ В$$

10

№8

Дано:

$\nu = 2$ моль

$T = 300$ K

$\eta = 0,4$

$V_2 = 3V$

$V_1 = V$

$F_{тр} = 0$

$m_{поршня} = 0$

медленное перемещение => $F = const$

Найти:

A

Решение:

1) Работа постоянной силы

$A = F\Delta h = pS\Delta h$

2) Уравнение Менделеева для начального и конечного состояний

$$-\begin{cases} pSh_1 = \nu RT \\ pSh_2 = \nu' RT' \end{cases} \Rightarrow A = R(\nu'T' - \nu T)$$

$\nu = \frac{N}{N_A}$

После диссоциации:

$N_1 = 2\eta N - O$

$N_2 = (1-\eta)N - O_2$

Шифр 78-11-34

Дополнительный лист

$$\nu' = \frac{N_1 + N_2}{N_A} = (\eta + 1)\nu$$

$pV = \nu RT$

$p3V = (\eta + 1)\nu RT'$ $\Rightarrow$ $3 = \dfrac{(\eta + 1)T'}{T}$

$$T' = \frac{3T}{\eta + 1}$$

$$\begin{array}{r} 831 \\ \times\ 12 \\ \hline 1662 \\ +\ 831 \\ \hline 9972 \end{array}$$

$$A = R\left((\eta+1)\nu \cdot \frac{3T}{(\eta+1)} - \nu T\right) = 2\nu RT$$

$A = 2 \cdot 2 \cdot 8{,}31 \cdot 300 = 12 \cdot 831 = 9972$ Дж

)твет: $A = 2\nu RT = 9972$ Дж

15

№6

Дано:

$= 2$ м

$= 1$ м

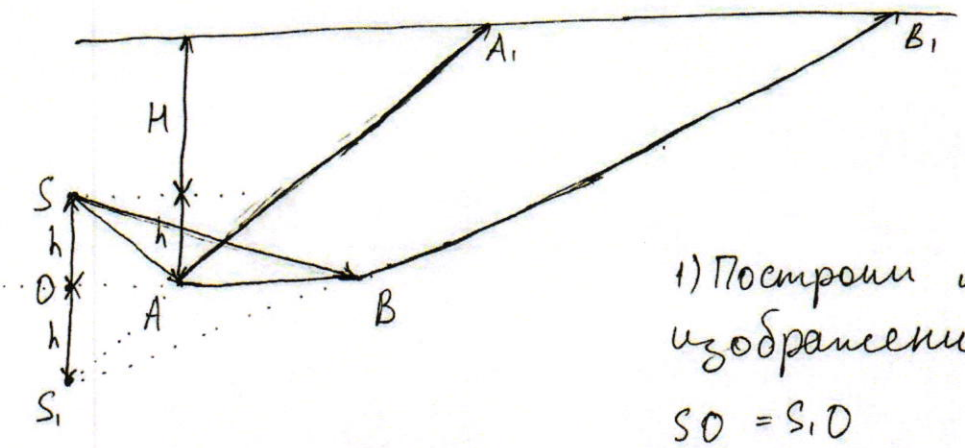
$= 2$ м/с

$A = 2h$

$= 5$ с

$\dfrac{2B_2}{A_1B_1}$ - ?

Решение:



1) Построим мнимое изображение источника

$SO = S_1O$

$SS_1 \perp OB$

) Лучи SA и SB отразились так, что их продолжения пройдут через мнимое изображение источника

) Треугольник $S_1A_1B_1 \sim$ треугольнику $S_1AB \Rightarrow \dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{H + 2h}{h} =$

$= \dfrac{2+2}{1} = 4 \Rightarrow$ Размер зайчика A_1B_1 в 4 раза больше размера зеркала A

Шифр 78-11-34

Дополнительный лист

При перемещении зеркала в право оба треугольника изменятся в одинаковое число раз, след. размер ~~[illegible]~~ зайчика всегда в 4 раза больше размера зеркала.

Ответ: ~~[illegible]~~ размер солнечного зайчика не изменится.

15