Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 63-10-15

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	11	12	13	14	15	10	—	15	90

Вариант 1

1. Разберём несколько случаев: $n, n+1, n+2, n+3$ – натуральные числа, идущие подряд

1) Произведение $n(n+1)$ и $(n+2)(n+3)$:

$(n+2)(n+3) > n(n+1)$, т.к. $n^2+5n+6 > n^2+n$

$\Rightarrow n^2+5n+6 = n^2+n+2022$

$4n = 2016$

$n = 504 \Rightarrow n+1 = 505,\ n+2 = 506,\ n+3 = 507$

2) Произведение $n(n+2)$ и $(n+1)(n+3)$:

$(n+1)(n+3) > n(n+2)$, т.к. $n^2+4n+3 > n^2+2n$

$\Rightarrow n^2+4n+3 = n^2+2n+2022$

$2n = 2019$

$n = 1009{,}5 \notin$ натуральным числам $\Rightarrow$ случай невозможен

3) Произведение $n(n+3)$ и $(n+1)(n+2)$:

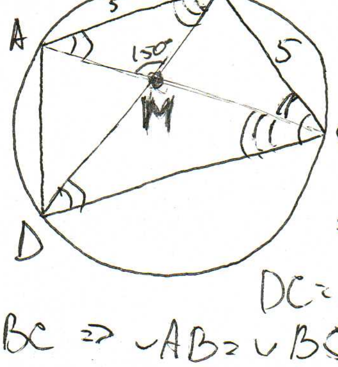
$(n+1)(n+2) > n(n+3)$, т.к. $n^2+3n+2 > n^2+3n$

$n^2+3n+2 = n^2+3n+2022$

$2 \neq 2022 \Rightarrow$ случай невозможен

Ответ: 504, 505, 506, 507.

2.



Дано: $AB = BC = 5$, $\angle BCD = 30°$

Решение:

$AB = BC \Rightarrow DC = AD$, т.к. суммы противоположных сторон описанного четырехугольника равны: $AB + DC = BC + AD \Rightarrow DC = AD$.

$DC = AD \Rightarrow \smile CD = \smile AD \Rightarrow 2\angle ABM = 2\angle ACD \Rightarrow \angle ABM = \angle ACD$

$AB = BC \Rightarrow \smile AB = \smile BC = 2\angle ACB = 2\angle BDC \Rightarrow \angle ACB = \angle BDC$.

$\triangle ABC$ – равнобедренный $(AB = BC = 5) \Rightarrow \angle ACB = \angle BAC = \angle BDC$.

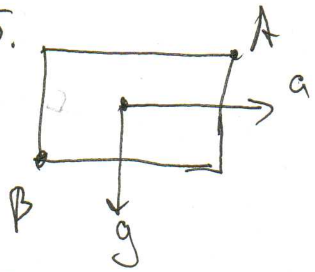
$\triangle ABM$ – вписанный: $\angle BAM + \angle ABM = \angle ACB + \angle ACD = 30° \Rightarrow \angle AMB = 150°$

ΔAMB – вписанный $\Rightarrow$ по теореме синусов: $\frac{AB}{\sin\angle AMB} = \frac{BM}{\sin\angle BAM} = \frac{AM}{\sin\angle ABM}$

$\Rightarrow R = \frac{AB}{2\cdot\sin\angle AMB} = \frac{5}{2\cdot\sin 150^\circ} = \frac{5}{2\cdot\frac{1}{2}} = 5$

Ответ: 5.

5.



Дано: $a = 5\ м/с^2$, $p_{min} = 1000$ Па, $g = 10\ м/с^2$, $L = 0{,}1$ м

Найти p_{max} – ?

Решение: Т.к. куб движется вправо, то в точке A будет давление минимальное, а в точке B – максимальное.

$p_{max} = p_{min} + p_g + p_a$ $\qquad$ $p_g = \rho g h$, где $h = L$

$p_a = \rho a h$, где $h = L$ $\qquad$ $p_g = \rho g L$

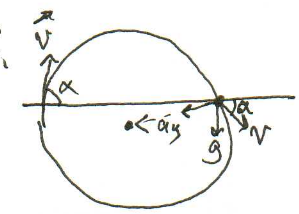
$p_a = \rho a L$

$p_{max} = p_{min} + \rho g L + \rho a L$ $\qquad$ $p_{max} = 1000 + 1000\cdot 10\cdot 0{,}1 + 1000\cdot 5\cdot 0{,}1$

$p_{max} = 1000 + 1000 + 500 = 2500$ Па

Ответ: 2500 Па

6.

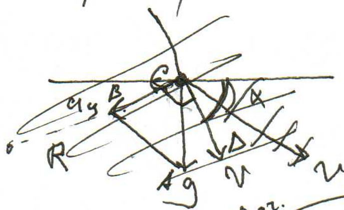


Дано: $v = 10$ м/с, $\alpha = 60^\circ$ | Найти R

Решение:

Т.к. движение идёт по параболе, то $|v_{начальная}| = |v_{конечная}|$

$\Rightarrow v = 10$ м/с

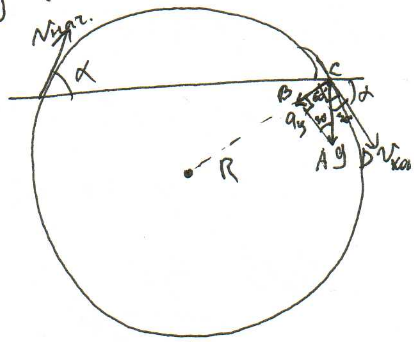


$a_ц = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v^2}{a_ц}$

~~ΔABC~~: v – касательная $\Rightarrow \angle BCD = 90^\circ$,

$CA \perp$ к земле $\Rightarrow \angle DCA = 90^\circ - \angle\alpha = 30^\circ$

$\Rightarrow \angle BCA = \angle BCD - \angle DCA = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$



$\Rightarrow a_ц = g\cdot\cos\alpha$ (т.к. ΔABC – прямоугольный)

$a_ц = 10\cdot\cos 60^\circ = 5\ м/с^2$

$R = \frac{10^2}{5} = \cancel{20\cdot 10} = 2\cdot 10 = 20$ м

Ответ: 20 м

4. Пусть $K = (8-\sqrt{65})^{2022} + (8+\sqrt{65})^{2022}$

Так как, например, $(8-\sqrt{65})^2 + (8+\sqrt{65})^2 = 64 - 16\sqrt{65} + 65 + 64 + 16\sqrt{65} + 65 = 258$

$258 \in N \Rightarrow K \in N$.

Тогда $(8+\sqrt{65})^{2022} = k-(8-\sqrt{65})^{2022}$

Так как $(8+\sqrt{65})^{-2022} = \frac{1}{(8+\sqrt{65})^{2022}} = \frac{(8-\sqrt{65})^{2022}}{(8+\sqrt{65})^{2022}\cdot(8-\sqrt{65})^{2022}} =$
$= \frac{(8-\sqrt{65})^{2022}}{(64-65)^{2022}} = \frac{(8-\sqrt{65})^{2022}}{(-1)^{2022}} = (8-\sqrt{65})^{2022}$

Следовательно, $(8-\sqrt{65})^{2022} = (8+\sqrt{65})^{-2022}$

$(8+\sqrt{65})^{-2022} = \frac{1}{(8+8,\dots)^{2022}} < \frac{1}{16^{2022}}$

$\frac{1}{16^{2022}} = \frac{1}{(2^4)^{2022}} = \frac{1}{2^{8088}} = \frac{1}{2^{8080}\cdot 2^8} = \frac{1}{(2^{10})^{808}\cdot 256} = \frac{1}{1024^{808}\cdot 256}$

$< \frac{1}{1000^{808}\cdot 100} = \frac{1}{(10^3)^{808}\cdot 10^2} = \frac{1}{10^{2424}\cdot 10^2} = \frac{1}{10^{2426}}$

Следовательно, $k-(8-\sqrt{65})^{2022} > k - \frac{1}{10^{2426}}$ => после запятой мы получим 2426 девяток.

8. Дано: $R_1 = 12$ Ом, $R_2 = 20$ Ом | Найти r -?

Решение: $\mathcal{E}_1$ - ЭДС батарейки, $\mathcal{E}_2$ - ЭДС амметра

$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2}{r}$ $\qquad R_1 = \frac{\mathcal{E}_2}{I_1}$ - показания амметра

$\Rightarrow I_1 = \frac{\mathcal{E}_2}{R_1}$

После смены полярности: $I_2 = \frac{\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_2}{r}$ и $R_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{I_2}$

$\Rightarrow I_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{R_2}$

Если $\mathcal{E}_2 < \mathcal{E}_1$:

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{\mathcal{E}_2}{R_1} \\ I_2 &= \frac{\mathcal{E}_2}{R_2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\mathcal{E}_2}{R_1} = \frac{\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2}{r} \\ \frac{\mathcal{E}_2}{R_2} = \frac{\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_2}{r}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{E}_2 r = \mathcal{E}_1 R_1 + \mathcal{E}_2 R_1 \\ \mathcal{E}_2 r = \mathcal{E}_1 R_2 - \mathcal{E}_2 R_2\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \mathcal{E}_2 r - \mathcal{E}_2 R_1 = \mathcal{E}_1 R_1 \\ \mathcal{E}_2 r + \mathcal{E}_2 R_2 = \mathcal{E}_1 R_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{E}_2(r-R_1) = \mathcal{E}_1 R_1 \\ \mathcal{E}_2(r+R_2) = \mathcal{E}_1 R_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{R_1}{r-R_1} \\ \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{R_1}{r+R_2}\end{cases} \Rightarrow \frac{R_1}{r-R_1} = \frac{R_2}{r+R_2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow R_1(r+R_2) = R_2(r-R_1)$

$R_1 r + R_1 R_2 = R_2 r - R_1 \cdot R_2$

$R_1 r - R_2 r = -2 R_2 R_1$

$r = \frac{-2 R_2 R_1}{R_1 - R_2}$ $\qquad r = \frac{-2 \cdot 12 \cdot 20}{12 - 20} = \frac{-\cancel{8} \cdot 12 \cdot \cancel{20}^{5}}{-\cancel{8}} = 60$ Ом

Если $\mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_1$:

$\left.\begin{array}{l} I_1 = \frac{\mathcal{E}_2}{R_1} \\ I_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{R_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\mathcal{E}_2}{R_1} = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{r} \\ \frac{\mathcal{E}_2}{R_2} = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{E}_2 r = \mathcal{E}_1 R_1 + \mathcal{E}_2 R_1 \\ \mathcal{E}_2 r = \mathcal{E}_2 R_2 - \mathcal{E}_1 R_2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{E}_2 (r - R_1) = \mathcal{E}_1 R_1 \\ \mathcal{E}_2 (r - R_2) = \cancel{\mathcal{E}_2 R_2} - \mathcal{E}_1 R_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{R_1}{r - R_1} \\ \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{-R_2}{r - R_2} \end{cases} \Rightarrow \frac{R_1}{r - R_1} = \frac{-R_2}{r - R_2}$

$\Rightarrow R_1 (r - R_2) = -R_2 (r - R_1)$

$R_1 r - R_1 R_2 = -R_2 r + R_2 \cdot R_1$

$\cancel{r = \frac{R_1^2 + R_1 R_2}{2 R_1}}$ $\qquad \cancel{r = \frac{12^2 + 12 \cdot 20}{2 \cdot 12} = \frac{12 + 20}{2} =}$

$r = \frac{2 R_2 R_1}{R_1 + R_2}$ $\qquad r = \frac{2 \cdot 12 \cdot 20}{12 + 20} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{12}^{3} \cdot 20}{\cancel{32}_{\cancel{16}_{4}}} = 15$ Ом

Ответ: 60 Ом или 15 Ом

3. $\frac{n^3-pn+1}{n^2+pn+2} \in Z \Rightarrow n^3-pn+1 \vdots n^2+pn+2$ 63/10

Рассмотрим следующие случаи:

1) p – нечетное, n – четное $\Rightarrow$ n^3 – четное, pn – четное $\Rightarrow (n^3-pn)$ – четное $\Rightarrow (n^3-pn+1)$ – нечетн

2) p – нечетное, n – нечетное $\Rightarrow$ n^3 – нечетное, pn – нечетное $\Rightarrow (n^3-pn)$ – четное $\Rightarrow (n^3-pn+1)$ – нечетн

3) p – нечетное, n – четное $\Rightarrow$ n^2 – четное, pn – четное $\Rightarrow (n^2+pn)$ – четное $\Rightarrow n^2+pn+2$ – четное

4) p – нечетное, n – нечетное $\Rightarrow$ n^2 – нечетное, pn – нечетное $\Rightarrow (n^2+pn)$ – четное $\Rightarrow (n^2+pn+2)$ – четн

$\Rightarrow$ числитель дроби – нечетное число, а знаменатель – четное число $\Rightarrow$ результат деление нечетн. на четное число не может быть целым числом.

$\Rightarrow$ p-должно быть четным, учитывая, что p – простое по условию, возьмем p=2. Дробь $\frac{n^3-2n+1}{n^2+2n+2} \in Z$

$$\begin{array}{l|l} n^3-2n+1 & n^2+2n+2 \\ n^3+2n^2+2n & n-2 \\ \hline -2n^2-4n+1 & \\ -2n^2-4n-4 & \\ \hline 5 & \end{array}$$

$= \frac{(n-2)(n^2+2n+2)+5}{n^2+2n+2} = \overbrace{n-2}^{\text{целое}} + \frac{5}{n^2+2n+2} \Rightarrow$ дробь будет целым числом, если $\frac{5}{n^2+2n+2}$ – целое $\Rightarrow 5 \vdots n^2+2n+2 \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} n^2+2n+2=1 \\ n^2+2n+2=5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (n+1)^2+1=1 \\ (n+1)^2+1=5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (n+1)^2=0 \\ (n+1)^2=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n+1=0 \\ n+1=\pm 2 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} n=-1 \\ n=1 \\ n=-3 \end{array}\right.$

Ответ: p=2, n=1, n=-1, n-3.