Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр ЕН-55-10-29

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	11	12	13	1	5	9	4		55

Вариант 1

1. Решение:

Пусть в I группе находятся числа n и $n+1$

Тогда во II группу попадут числа $n+2$ и $n+3$

Произведение чисел в I группе будет меньше, чем произведение чисел во II группе. $\Rightarrow (n+2)(n+3)-2022=n(n+1)$

$n^2+5n+6=n^2+n+2022,$

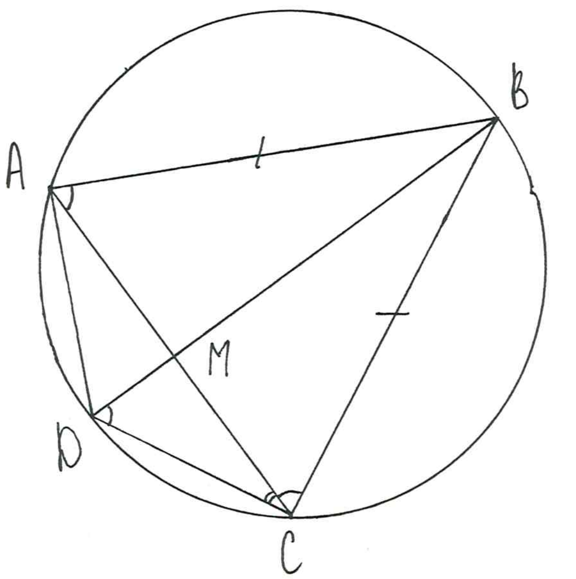
$4n=2016,$

$n=504. \Rightarrow n+1=505;\ n+2=506;\ n+3=507$

Ответ: 504; 505; 506; 507.

11б

2.



Дано:

ABCD

$AB=BC=5$

$\angle BCD=30^\circ$

Найти: r

Решение:

12б

1) Пусть $\angle BCA=\alpha$

Тогда $\angle ACD=\beta=30^\circ-\alpha$

2) Р/м $\triangle ABC$, $\triangle ABC$ - равнобедренный $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BAC=\angle BCA=\alpha$

3) Т.к. $\angle CAB$ и $\angle BDC$ - вписанные и лежат на дуге BC, то $\angle BDC=\angle BAC=\alpha$

4) Р/м $\triangle MDC$, $\angle DMC=180^\circ-\angle MDC-\angle MCD$

$\angle DMC=180^\circ-\alpha-(30^\circ-\alpha)=180^\circ-\alpha-30^\circ+\alpha=150^\circ$

5) $\angle DMC=\angle AMB=150^\circ$ (как вертикальные)

6) Р/м $\triangle AMB$, из следствия из теоремы синусов: $\frac{AB}{\sin\angle AMB}=2r$

$r=\frac{AB}{2\sin\angle AMB}$ $r=\frac{5}{2\cdot\sin150^\circ}=5$ Ответ: 5

3. Дано:
p - простое
n - целое
$\frac{n^3-pn+1}{n^2+pn+2}$ - целое
Найти: p, n

Решение:
Рассмотрим несколько случаев:
1) n - четное; p - нечетное
$\frac{n^3-pn+1}{n^2+pn+2} = \frac{\text{нечетное}}{\text{четное}} \Rightarrow \frac{n^3-pn+1}{n^2+pn+2} \notin \mathbb{Z}$
2) n - четное; p - четное
$\frac{n^3-pn+1}{n^2+pn+2} = \frac{\text{нечетное}}{\text{четное}} \Rightarrow \frac{n^3-pn+1}{n^2+pn+2} \notin \mathbb{Z}$
3) n - нечетное; p - нечетное
$\frac{n^3-pn+1}{n^2+pn+2} = \frac{\text{нечетное}}{\text{четное}} \Rightarrow \frac{n^3-pn+1}{n^2+pn+2} \notin \mathbb{Z}$
4) n ... тное; p - четное
$\frac{n^3-pn+1}{n^2+pn+2} = \frac{\text{четное}}{\text{нечетное}} \Rightarrow \frac{n^3-pn+1}{n^2+pn+2} \in \mathbb{Z}$
Из этого следует, что n может быть только нечетным числом, а p - четным.
Т.к. p - простое и четное, то $p=2$
Тогда, $\frac{n^3-pn+1}{n^2+pn+2} = \frac{n^3-2n+1}{n^2+2n+2}$
$\frac{n^3-2n+1}{n^2+2n+2} = \frac{(n^2+2n+2)(n-2)+5}{n^2+2n+2} = n-2+\frac{5}{n^2+2n+2} \Rightarrow$
$\Rightarrow n^2+2n+2 = \pm 1; \pm 5$

1. $n^2+2n+2=1$
$n^2+2n+1=0,$
$(n+1)^2=0,$
$n=-1.$

2. $n^2+2n+2=-1,$
$n^2+2n+3=0,$
$D=4-4\cdot 3=4-12=-8$
$D<0$, корней нет

3. $n^2+2n+2=5$
$n^2+2n-3=0,$
По обр. т. Виета:
$n_1=-3; n_2=1.$

4. $n^2+2n+2=-5,$
$n^2+2n+7=0,$
$D=4-4\cdot 7=4-28=-24$
$D<0$, корней нет

$-1; -3; 1$ - нечетн

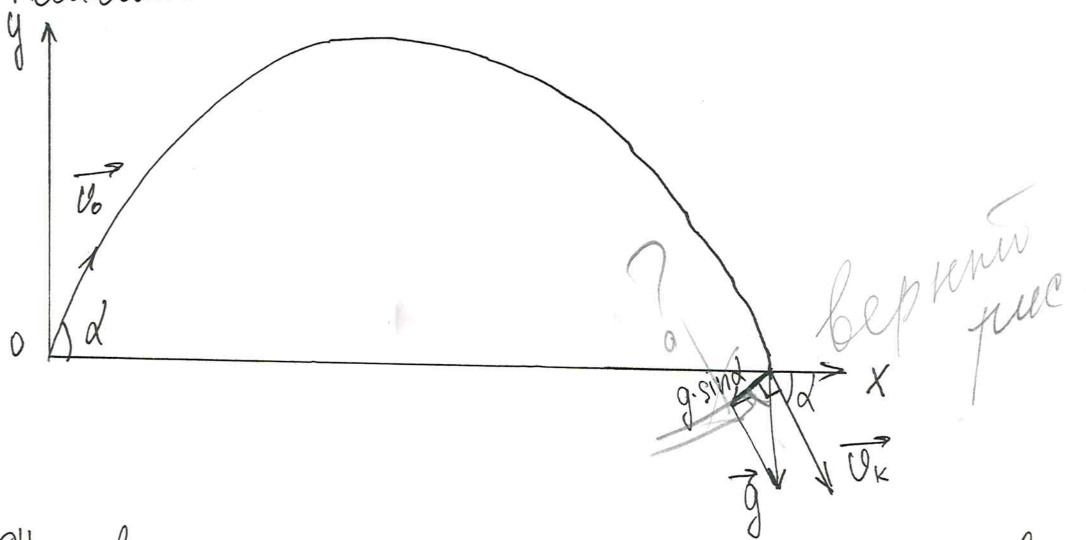
Ответ: $p=2$; $n=-3$; $n=-1$; $n=1$

13 б

6. Дано:
$\alpha = 60^\circ$
$\upsilon_0 = 10\ \frac{м}{с}$
$g = 10\ \frac{м}{с^2}$

$R_к - ?$

Решение:



Т.к. в начале и конце полета угол равен 60°, то $\upsilon_0 = \upsilon_к$

$a_н = \frac{\upsilon_к^2}{R_к}$

$R_к = \frac{\upsilon_к^2}{a_н} = \frac{\upsilon_0^2}{g \cdot \cancel{\sin\alpha}\cos}$ −1

$R_к = \frac{(10\frac{м}{с})^2}{10\frac{м}{с^2} \cdot \sin 60^\circ} = \frac{100\frac{м^2}{с^2}}{10\frac{м}{с^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 11,5м$

9б

Ответ: $R_к \approx 11,5м$.

7. Дано:
$V = 1,5 \cdot 10^{-3} м^3$
$\Delta t = 5^\circ C$
$\tau_1 = 2 мин$
$P = 1,5 \cdot 10^3 Вт$
$c = 4200 \frac{Дж}{кг \cdot ^\circ C}$
$\rho = 1 \frac{г}{см^3}$

$\tau_2 - ?$

Решение:

$\Delta t_1 = \frac{\Delta t}{\tau_1}$

$\Delta t_1 = \frac{5^\circ C}{2} = 2,5^\circ C$

$\Delta Q_1 = \Delta Q_2$ +3б
$\Delta Q_1 = cm\Delta t_1$
$\Delta Q_2 = P\tau_2$
$cm\Delta t_1 = P\tau_2$

$\tau_2 = \frac{cm\Delta t_1}{P} = \frac{c\rho V\Delta t_1}{P}$ +1

$\tau_2 = \frac{4200\frac{кг}{кг \cdot ^\circ C} \cdot 1000\frac{кг}{м^3} \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} м^3 \cdot 2,5^\circ C}{1,5 \cdot 10^3 Вт} \approx 10,5^\circ C$

4б

Ответ: $\tau_2 = 10,5^\circ C$.

4. Решение:

$(8+\sqrt{65})^{2022} = \frac{(8+\sqrt{65})^{2022} \cdot (8-\sqrt{65})^{2022}}{(8-\sqrt{65})^{2022}} = \frac{(64-65)^{2022}}{(8-\sqrt{65})^{2022}} = \frac{1}{(8-\sqrt{65})^{2022}}$

? 1б

Дано:

$a = 5 \frac{м}{с^2}$

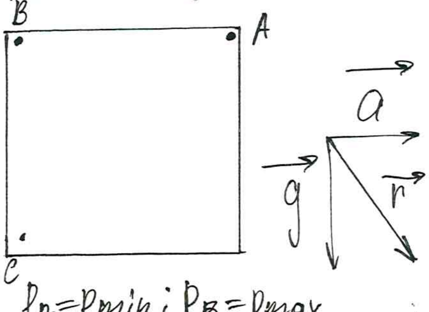
$p_{min} = 1000$ Па

$g = 10 \frac{м}{с^2}$

$l = 10$ см $= 0,1$ м

p_{max} - ?

Решение:



5

$p_A = p_{min}$; $p_B = p_{max}$

$p_B = p_A + \rho\sqrt{g^2+a^2}\, l$

$p_B = 1000 \text{ Па} + 1000 \frac{м}{м^3} \sqrt{(10\frac{м}{с})^2+(5\frac{м}{с})^2} \cdot 0,1 \text{ м} = \cancel{2116}\ 2118 \text{ Па}$

$p_c = p_B + \rho g l$

$p_c = 2116 \text{ Па} + 1000 \text{ Па} \cdot 10 \frac{м}{с^2} \cdot 0,1 \text{ м} = 3118 \text{ Па}$

Ответ: $p_{max} = 3118$ Па

5б