Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр ЮН4 - 11 - 02

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	10	7	13	14	4	15	0	4	67

Вариант 1

$\boxed{№1}$ Рассмотрим $2b > 4a + c$

$b > 2a + \frac{c}{2}$

т.к. обе части ~~неотр.~~ положительны по усл., то возведу в квадрат:

$b^2 > \left(2a + \frac{c}{2}\right)^2 = \left(2a - \frac{c}{2}\right)^2 + 4ac \geqslant 4ac$ +

т.е. $b^2 > 4ac$. ■

$\boxed{№2}$ $\begin{cases} \sin^4 x + \sin^5 y = 1, \\ \cos^3 x + \cos^7 y = 1; \end{cases}$

Очевидно? решениями системы являются

решения $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x = 1, \\ \sin y = 1; \end{cases} \end{array}\right.$ Покажем, что других решений нет:

Предположим, что есть, тогда $\cos x, \cos y, \sin x, \sin y \neq 0,$
$\cos x, \cos y, \sin x, \sin y \neq 1,$

причём $\begin{cases} \sin y > 0, \\ \cos x > 0, \\ \cos y > 0 \end{cases}$, т.к. иначе решения не удовл. ±

Сложим строки исходной системы:

$\sin^4 x + \sin^5 y + \cos^3 x + \cos^7 y = 1 + 1$

$(1 - \cos^2 x)^2 + \sin^5 y + \cos^3 x + \cos^7 y = 1 + \cos^2 y + \sin^2 y$

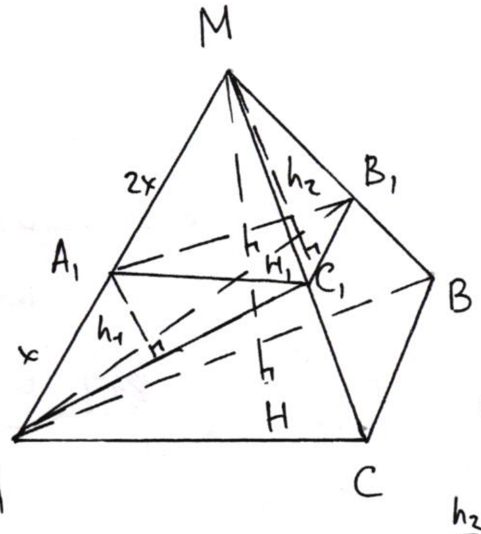
$\cos^2 x\,(\cos^2 x + \cos x - 2) + \sin^2 y\,(\sin^3 y - 1) + \cos^2 y\,(\cos^5 y - 1) = 0$

$\cos^2 x\,(\cos x - 1)(\cos x + 2) + \sin^2 y\,(\sin^3 y - 1) + \cos^2 y\,(\cos^5 y - 1) = 0$

сумма отрицательных величин (исходя из ограничений выше) равна нулю. противоречие, сл-но, других решений нет.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\right),$
$\left(2\pi m,\ m \in \mathbb{Z};\ \frac{\pi}{2} + 2\pi l,\ l \in \mathbb{Z}\right).$

$\boxed{№3}$



Решение:

1) $\left.\begin{array}{l}(A_1B_1C_1) \parallel (ABC) \text{ по усл.} \\ MH \perp (ABC)\end{array}\right\} \Rightarrow MH \perp (A_1B_1C_1)$

и $\dfrac{V(MABC)}{V(MA_1B_1C_1)} = k^3$, где $k = \dfrac{MA}{MA_1} = \dfrac{MH}{MH_1} = \ldots$

т.е. $k^3 = \dfrac{324}{96} = \dfrac{27}{8} = (1{,}5)^3 \Rightarrow k = 1{,}5$

2) h_1 – высота в пирамиде $A_1AB_1C_1$

h_2 – в пирамиде MAB_1C_1

$\dfrac{h_2}{h_1} = \dfrac{MA}{AA_1} = \dfrac{3}{1}$

3) $\dfrac{V(A_1AB_1C_1)}{V(MAB_1C_1)} = \dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow V(MAB_1C_1) = \dfrac{3}{2} V(MA_1B_1C_1) = 144$

Ответ: 144.

$\boxed{№4}$ Если в квадратном трёхчлене x^2+px+q $p=q+1$, т.е. $p-q=1$, то он имеет целые корни $x_1=-1$, $x_2=-q$. (по т. Виета)

В трёхчлене $x^2+20x+22$ – $p-q=-2$,
а в $x^2+202x+2$ – $p-q=200$

Разность $(p-q)$ за один шаг изменяется на единицу, значит, на пути от -2 до 200 она обязательно примет значение 1 и трёхчлен будет иметь два целых корня. чтд

Ответ: верно.

$\boxed{№5}$ Дано:
$M = 5$ кг
$m = 30$ кг
$t = 2$ с

$N - ?$

Решение:

$N = \dfrac{A}{t} = \dfrac{FS}{t}$

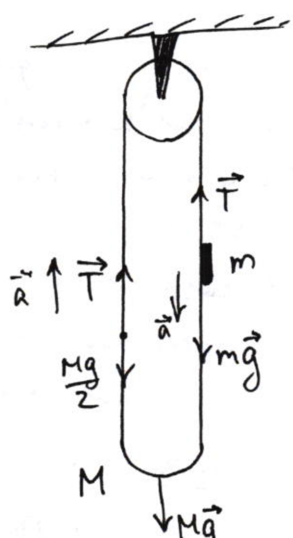
силы в проекции на вертикальное направление:

$+\begin{cases} mg - T = ma \\ T - \dfrac{Mg}{2} = \dfrac{Ma}{2} \end{cases}$

$mg - \dfrac{Mg}{2} = a\left(m + \dfrac{M}{2}\right) \Rightarrow \cancel{a = \dfrac{32{,}5g}{27{,}5}}$

$\Rightarrow a = \dfrac{27{,}5g}{32{,}5} = \dfrac{11}{13}g$

тогда $F = ma = \dfrac{330}{13}g$, $S = \dfrac{at^2}{2} = \dfrac{11 \cdot 4}{26} = \dfrac{22}{13}$



$N = \dfrac{330g \cdot 22}{13 \cdot 13 \cdot 2} \approx 215$ (Вт)

Ответ: $N \approx 215$ Вт

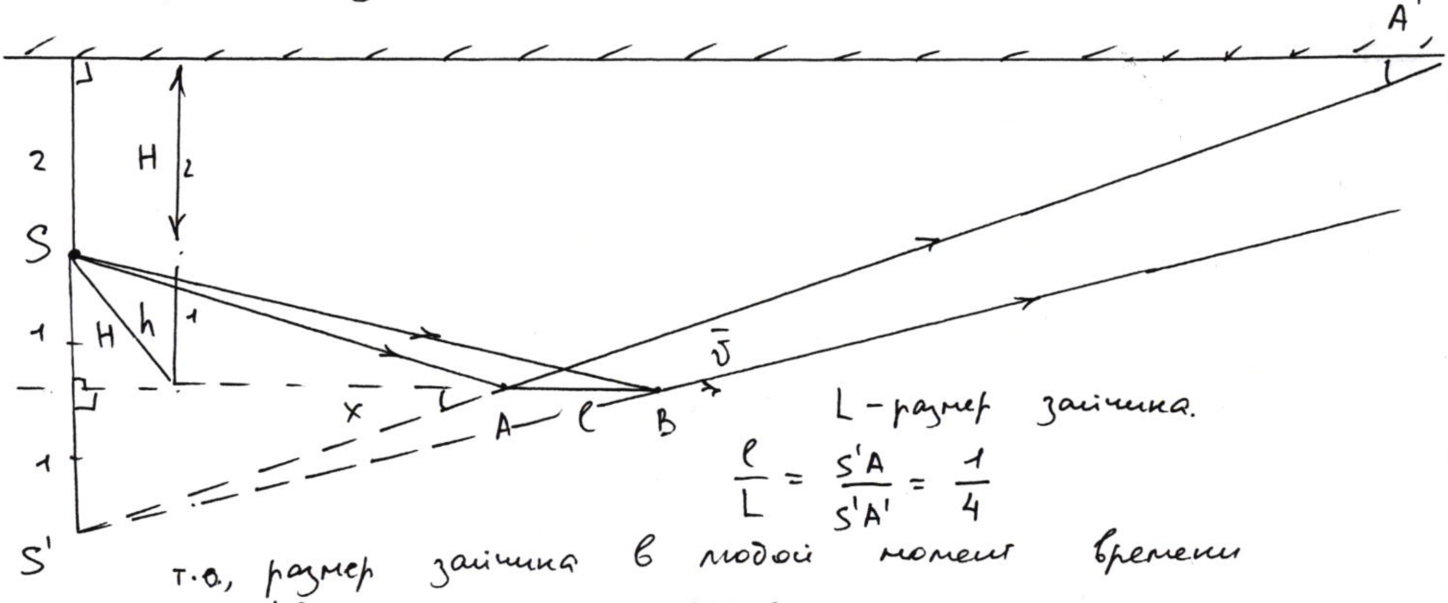
Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр ЮЖ-11-02

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

№6 Рассмотрим ситуацию в произвольный момент времени:



L – размер зайчика.

$$\frac{l}{L} = \frac{S'A}{S'A'} = \frac{1}{4}$$

т.о, размер зайчика в любой момент времени равен $4l$, т.е. не изменяется.

№8 Дано:
$\nu = 2$ моль
$T = 300K$
$V_2 = 3V_1$

A – ?

Решение:

$pV = \nu RT$

$pV_1 = \nu RT_1$, $3pV_1 = 0{,}6\nu RT_2$ $\xrightarrow{\text{разделим}}$ $\frac{1}{3} = \frac{T_1}{0{,}6T_2} \Rightarrow T_2 = 5T_1$

$A = p\Delta V = \boxed{0{,}6\nu R\Delta T} = 0{,}6\nu R\cdot 4T_1 = 0{,}6\cdot 2\cdot 8{,}31\cdot 300\cdot 4 \approx 12000$ Дж

Ответ: 12 кДж.