шифр 77-11-36

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	10	0	13	14	0	15	0	10	62

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Вариант 2

Задача 1.

Дано: $3b > 9a + c > 0$

Док-ть: $b^2 > 4ac$

$3b > 9a + c > 0 \Rightarrow b > 3a + \frac{c}{3} > 0$ (*)

Рассмотрим $3a + \frac{c}{3}$. Заметим, что

$\left(\sqrt{3a} + \sqrt{\frac{c}{3}}\right)^2 = 3a + 2\sqrt{ac} + \frac{c}{3}$

При этом $\left(\sqrt{3a} + \sqrt{\frac{c}{3}}\right)^2 \geq 0$, так как это квадрат. Значит $3a + \frac{c}{3} + 2\sqrt{ac} \geq 0 \Rightarrow 3a + \frac{c}{3} \geq 2\sqrt{ac}$. (обе части ≥ 0)

$\Downarrow$

$\left(3a + \frac{c}{3}\right)^2 \geq 4ac$

Вернёмся к уравнению (*): +

$b > 3a + \frac{c}{3} > 0$

Поскольку $b > 0$ и $3a + \frac{c}{3} > 0$, то возведя обе части в квадрат мы получим равносильное уравнение:

$b^2 > \left(3a + \frac{c}{3}\right)^2$, но мы знаем, что $\left(3a + \frac{c}{3}\right)^2 \geq 4ac$, а можем переписать равенство как $b^2 > \left(3a + \frac{c}{3}\right)^2 \geq 4ac \Rightarrow b^2 > 4ac$

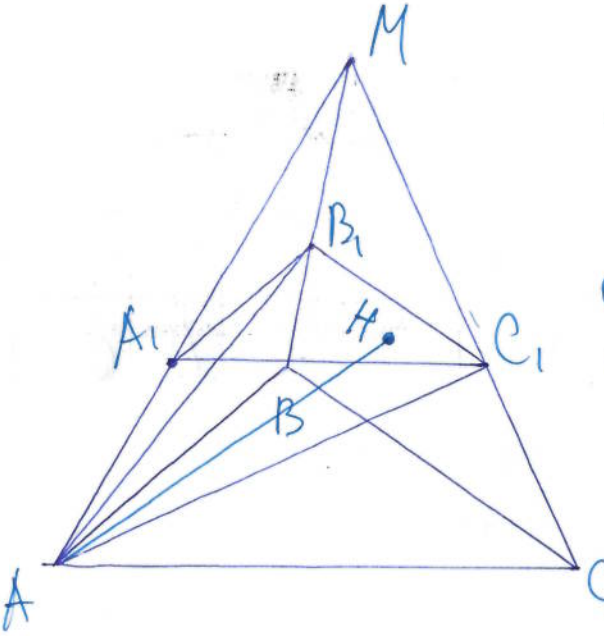
значит $b^2 > 4ac$. ЧТД.

Задача 3.

Дано:
$V_{MABC} = 375$
$V_{MA_1B_1C_1} = 81$
$(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$

Найти: $V_{MAB_1C_1}$

Рисунок на обороте $\Rightarrow$



Решение:

1. Применим гомотетию к пирамиде $MA_1B_1C_1$ относительно точки M, то есть увеличим пирамиду $MA_1B_1C_1$ в K раз, чтобы плоскость $(A_1B_1C_1)$ совпала с плоскостью (ABC), а они совпадут, так как нам дано, что они параллельны. Тогда их объёмы будут отличаться в K^3 раз, так как все размеры пирамиды $MA_1B_1C_1$ увеличились в K раз, а значит $S_{A_1B_1C_1}$ увеличилась в K^2 раз, а расстояние от точки M до плоскости $A_1B_1C_1$ в K раз. $\left(V=\frac{1}{3}h\cdot S\right)$.

Посчитаем этот K:

$$\frac{V_{MABC}}{V_{MA_1B_1C_1}}=k^3=\frac{375}{81}\Rightarrow k=\sqrt[3]{\frac{375}{81}}=\sqrt[3]{\frac{125\cdot 3}{81}}=\sqrt[3]{\frac{125}{27}}=\sqrt[3]{\left(\frac{5}{3}\right)^3}=\frac{5}{3}.$$

Мы можем сделать вывод, что $\frac{MC_1}{MC}=\frac{3}{5}$; $\frac{MB_1}{MB}=\frac{3}{5}$; $\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{3}{5}$; так как после увеличения пирамиды $MA_1B_1C_1$ отрезки MC_1; MB_1; B_1C_1 перешли в MC; MB; BC соответственно, или можно просто доказать, что $\triangle MB_1C_1 \sim \triangle MBC$ ($\angle BMC$ - общий и $\angle MB_1C_1=\angle MBC$ $(B_1C_1 \parallel BC)$) с коэффициентом $\frac{1}{K}$. Если все 3 стороны треугольника MB_1C_1 в $\frac{3}{5}$ раз меньше соответственно всех 3 сторон треугольника MBC, то их площади относятся как $\frac{S_{MB_1C_1}}{S_{MBC}}=\frac{1}{k^2}=\frac{9}{25}$, так как

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 77-11-36

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

Задача 3 (продолжение)

если подставить все стороны в формулу Герона, то из каждого слагаемого под корнем вынесется $\frac{1}{k}$, а слагаемых всего 4, значит из под корня вынесется $\frac{1}{k^2}$.

Также объём V_{MABC} можно расписать как:

$V_{MABC} = \frac{1}{3} \cdot AH \cdot S_{MBC}$, где AH – расстояние от точки A до плоскости MBC.

$V_{MAB_1C_1} = \frac{1}{3} \cdot AH \cdot S_{MB_1C_1}$, так как плоскости MB_1C_1 и MBC – это одна и та же плоскость, следовательно расстояние от точки A до этих плоскостей одинаково и равно AH.

$$\frac{V_{MAB_1C_1}}{V_{MABC}} = \frac{\cancel{\frac{1}{3}} \cdot \cancel{AH} \cdot S_{MB_1C_1}}{\cancel{\frac{1}{3}} \cdot \cancel{AH} \cdot S_{MBC}} = \frac{S_{MB_1C_1}}{S_{MBC}} = \frac{1}{k^2} = \frac{9}{25} \Rightarrow$$

$$V_{MAB_1C_1} = \frac{9}{25} V_{MABC}$$

$$V_{MAB_1C_1} = \frac{9}{25} \cdot 375 = 9 \cdot 15 = 135.$$

+

Ответ: $V_{MAB_1C_1} = 135$.

Задача 4.

Изначально мы имеем трёхчлен $x^2 - 20x + 22$, а нам надо получить $x^2 - 202x + 2$.

Если в какой-то момент у нас будет трёхчлен, у которого есть 2 целых корня, то запишем его как $x^2 + l \cdot x + m$, где по теореме Виетта $l = -(a+b)$; $m = ab$, где a и b – корни этого трёхчлена ~~а значит целое число~~

$l = -(a+b) \Rightarrow -l = a+b$. (Заменим $-l = t$)

Получим:

$$x^2 - tx + m \quad (t = a+b;\ m = ab).$$

В начальной момент $t = 20$; $m = 22$. А мы должны получить $t = 202$; $m = 2$. То есть изначально будет случай, когда $t < m$, а надо получить, чтобы $t > m$, значит однозначно будет такой момент времени когда $t = m$, и соотвественно будет момент когда t можно будет представить как $k+1$; а m как просто k, то есть t будет на 1 больше чем m, то есть $t = m+1 \Rightarrow a+b = ab+1$

$a+b = ab+1$ (такой расклад будет в любом случае, иначе мы не сможем получить конечной трёхчлен, который нам нужен).

$a-1 = ab-b$

$(a-1) = b(a-1)$

2 случая:

1) $a = 1$; Тогда $b = m$

2) $a-1 \neq 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = m$

$\Rightarrow$ a и b – целые числа, так как известно, что m – целое.

То есть будет такой момент когда оба корня будут целыми. Также есть вероятность, что это произойдет когда у нас будет трёхчлен $x^2 - 2x + 1$, то есть оба корня будут целыми, но они будут одинаковыми.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 77-11-36

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

+

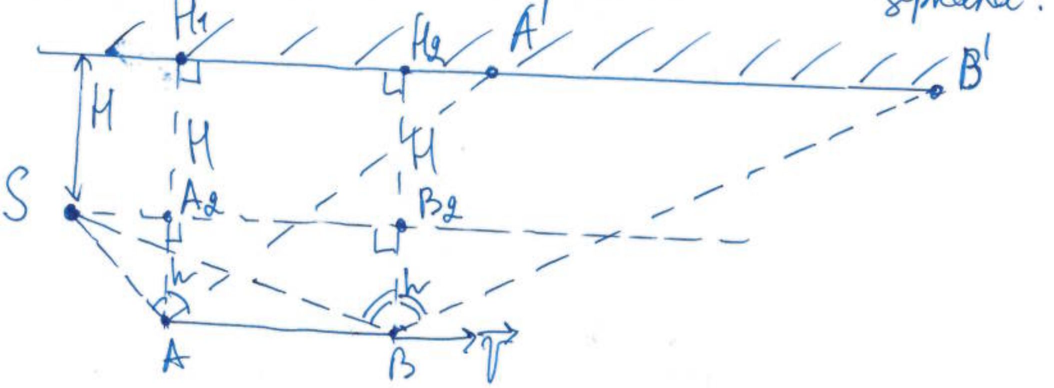
Задача 4 (продолжение).

Но мы можем разложить этот трёхчлен как $(x-1)(x-1)$, откуда $a=1$; $b=1$; оба корня целые, так что по сути условие выполняется.

Ответ: да, верно.

Задача 6. +

Рассмотрим положение системы до движения зеркала:



Дано:
$H=3$ м
$h=2$ м
$V=1,5\ \frac{м}{с}$
$SA_0=2h$
$t=4$ с

1. В плоском зеркале угол падения равен углу отражения. Значит $\angle SAA_2=\angle A'AA_2 \Rightarrow \Delta SAA_2 \sim \Delta A'AH_1$ ($\angle SA_2A=\angle A'HA=90°$)

$$\Downarrow$$

$$\frac{SA_2}{A'H_1}=\frac{AA_2}{AH_1}=\frac{h}{H+h}=\frac{2}{5} \Rightarrow A'H_1=\frac{5}{2}\cdot SA_2$$

2. $SA_2=\sqrt{SA^2-AA_2^2}=$

$=\sqrt{(2h)^2-(h)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$$\Downarrow$$

$A'H_1=\frac{5}{2}\cdot SA_2=5\sqrt{3}$.

3. Зеркало плоское $\Rightarrow \angle SBH_2=\angle B'BH_2 \Rightarrow \Delta SBB_2 \sim \Delta B'BH_2$ ($\angle SB_2B=\angle B'H_2B=90°$)

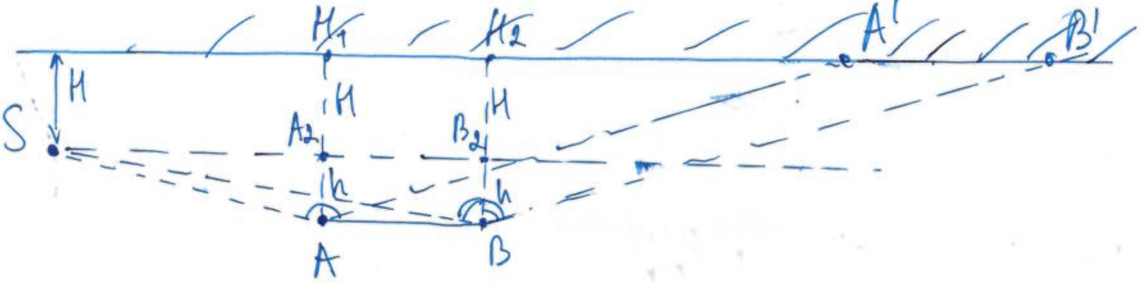
Задача 4 (продолжение).

5. $\triangle SBB_2 \sim \triangle B'BH_2 \Rightarrow \frac{SB_2}{B'H_2} = \frac{BB_2}{BH_2} = \frac{h}{H+h} = \frac{2}{5} \Big| \Rightarrow B'H_2 = \frac{5}{2} SB_2$.

6. $SB_2 = 2\sqrt{3} + AB \Big| \Rightarrow B'H_2 = \frac{5}{2}(2\sqrt{3} + AB) = 5\sqrt{3} + \cancel{AB}\, 2{,}5AB$

7. $A'B' = B'H_2 - A'H_1 + AB = 5\sqrt{3} + 2{,}5AB - 5\sqrt{3} + AB = 3{,}5AB$.

Рассмотрим случай после 4с движения:



Аналогичная ситуация и здесь:

1. $\frac{SA_2}{A'H_1} = \cancel{\frac{2}{5}} = \frac{h}{H+h} = \frac{2}{5} \Big| \Rightarrow A'H_1 = \frac{5}{2} \cdot SA_2$, где SA_2 – начальное расстояние от S до A_2 + пройденное телом за 4 секунды, то есть $SA_2 = 2\sqrt{3} + 6$. $\Big| \Rightarrow A'H_1 = 5\sqrt{3} + 15$.

2. $\frac{SB_2}{\cancel{A}B'H_2} = \frac{h}{H+h} = \frac{2}{5} \Big| \Rightarrow B'H_2 = \frac{5}{2} \cdot SB_2 \; (SB_2 = SA_2 + AB)$

$\Downarrow$

$B'H_2 = \frac{5}{2}(2\sqrt{3} + 6 + AB) = 5\sqrt{3} + 15 + \frac{5}{2}AB$.

3. $A'B' = B'H_2 - A'H_1 + AB = 5\sqrt{3} + 15 + 2{,}5AB - 5\sqrt{3} - 15 + AB = 3{,}5AB$.

В начальном положении получается длина изображения равна $3{,}5\,AB$; в конечном тоже $3{,}5\,AB$. Значит длина, то есть размеры, солнечного зайчика не изменились.

Ответ: в 1 раз, то есть остались прежними.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 77-11-36

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

Задача 8. 10

Дано:
$\nu = 4$ моля
$T_0 = 350$ K
$V_k = 2V_0$
Диссоц. 60% молекул

~~До~~ Диссоциация молекул никак не повлияет на процесс, поэтому её можно не учитывать.

Поскольку газ нагревали медленно, то происходил следующий процесс. Газ немного нагревался → давление немного увеличивалось → газ толкал поршень и увеличивал объём → давление возвращалось к прежнему значению засчёт увеличения объёма. То есть в конце конечное давление будет равно начальному, а давление и температура газа увеличатся в 2 раза. → $T_k = 2T_0 = 700$ K.

Поскольку давление постоянное, то можем рассчитать работу по формуле $A = p\Delta V = \nu R \Delta T = 4 \cdot 8{,}31 \cdot 350 =$
$= 4 \cdot 35 \cdot 83{,}1 = 140 \cdot 83{,}1 = 831 \cdot 14 = 11\,634$ Дж.

Ответ: 11 634 Дж. +