Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 10-11-15

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	10	10	13	10	10	10	10	15	88

Вариант 2

Страница 1

№1

$3b > 9a + c > 0$; обе части больше нуля $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ можно сделать равносильный переход, возведя обе части в квадрат: $9b^2 > (9a+c)^2$

$$9b^2 > 81a^2 + 18ac + c^2 \,|:9$$

$$\Rightarrow b^2 > \underbrace{9a^2 + 2ac + \frac{c^2}{9}}_{(3a+\frac{c}{3})^2}$$

$\Rightarrow$ если доказать, что $\left(3a + \frac{c}{3}\right)^2 \geq 4ac$, то $b^2 > 4ac$ $\Rightarrow$ будет доказано требуемое:

$$\left(3a + \frac{c}{3}\right)^2 - 4ac \geq 0$$

+

$$9a^2 + 2ac + \frac{c^2}{9} - 4ac \geq 0$$

$$\underbrace{9a^2 - 2ac + \frac{c^2}{9}}_{(3a - \frac{c}{3})^2} \geq 0$$

$\left(3a - \frac{c}{3}\right)^2 \geq 0$ – Верно всегда, т.к. любое число в квадрате ≥ 0

$$\overset{\text{II}}{\left(3a + \frac{c}{3}\right)^2} \geq 4ac \Rightarrow b^2 > 4ac$$

ЧТД

№ 8

Дано:

$T = 350 K$

$\nu_1 = 4$ моля

$2V_1 = V_2$

$p = const$

60% - диссоц.

$A_г - ?$

Решение:

Поршень невесомый, легко скользит $\Rightarrow$ $\Rightarrow p = const$, т.е. процесс изобарный

Воспользуемся ур-нем Менделеева-Клапейрона: $pV = \nu RT$

$p_1 = p_2 \Rightarrow \frac{\nu_1 R T_1}{V_1} = \frac{\nu_2 R T_2}{V_2}$

60% молекул диссоциировались на атомы, следовательно кол-во в-ва увелич. на 60%, т.е. $\nu_2 = 1,6 \cdot \nu_1 = 6,4$ моля

$$\frac{\cancel{\nu_1} R T_1}{\cancel{V_1}} = \frac{1,6 \cancel{\nu_1} R T_2}{2\cancel{V_1}} \Rightarrow T_2 = \frac{2T_1}{1,6} = \frac{700}{1,6} = 437,5 K$$

Работа газа в изобарном процессе определяется формулой: $A_г = p\Delta V = pV_2 - pV_1 \Rightarrow$ по УМК: $A_г = \nu_2 RT_2 - \nu_1 RT_1 = R(\nu_2 T_2 - \nu_1 T_1) = 8,31(6,4 \cdot 437,5 - 4 \cdot 350) = 8,31(2800 - 1400) = 8,31 \cdot 1400 = 11634$ Дж

Ответ: 11634 Дж

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 10-11-15

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

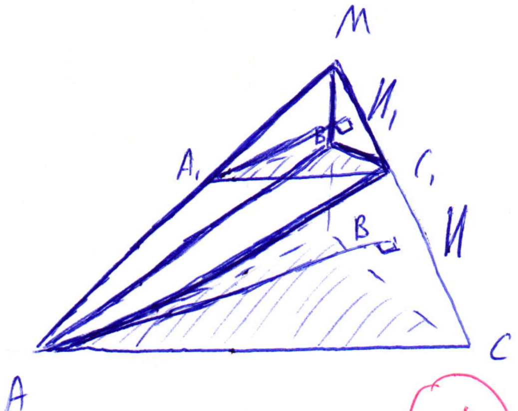
Страница 2

№7

Действующее напряжение найдём по формуле: $U_g = \sqrt{\frac{\int_T U^2(t)dt}{T}} = \sqrt{\frac{\int_0^{t_0} 50^2 dt + \int_{t_0}^{2t_0} 100^2 dt + \int_{2t_0}^{3t_0} (-50)^2 dt + \int_{3t_0}^{4t_0} 50^2 dt}{4t_0}} = \sqrt{\frac{2500t_0 + 10000t_0 + 2500t_0 + 2500t_0}{4t_0}} = \sqrt{\frac{17500 t_0}{4 t_0}} =$

$= \sqrt{4375}$ В ≈ 66 В

Ответ: 66 В



№ 3

Параллельная плоскость отсекает от пирамиды подобную ей, т.е. $MA_1B_1C_1 \sim MABC \Rightarrow$

$\frac{V_{MA_1B_1C_1}}{V_{MABC}} = \frac{81}{375} = \frac{27}{125} = k^3$ (т.к. объёмы подобных фигур соотносятся как куб коэф. подобия) $\Rightarrow$

$\Rightarrow k = \frac{3}{5}$, т.е. все соответственные элементы в данных пирамидах соотносятся как $\frac{3}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ высоты к плоскости MBC: $\frac{A_1H_1}{AH} = \frac{3}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow AH = \frac{5A_1H_1}{3}$ $\Leftarrow\Rightarrow$ $AH = \frac{5 \cdot 3 \cdot 81}{3 \cdot S_{MB_1C_1}}$ $=$ $\frac{5 \cdot 81}{S_{MB_1C_1}} = AH$

$V_{A_1MB_1C_1} = 81 = \frac{1}{3} \cdot A_1H_1 \cdot S_{MB_1C_1} \Rightarrow A_1H_1 = \frac{3 \cdot 81}{S_{MB_1C_1}}$

$$V_{искомый} = V_{MAB_1C_1} = \frac{1}{3}\cdot AM \cdot S_{MB_1C_1} = \frac{1}{3}\cdot \frac{5\cdot 81 \cdot \cancel{S_{MB_1C_1}}}{\cancel{S_{MB_1C_1}}} = \frac{5\cdot 81}{3} =$$

$$= 5\cdot 27 = 135$$

Ответ: 135

№2

$$\begin{cases} \sin^3 x + \sin^4 y = 1 \\ \cos^3 x + \cos^5 y = 1 \end{cases} \Rightarrow (\sin^3 x + \cos^3 x) + (\sin^4 y + \cos^5 y) = 2 \; *$$

X и Y такие, что их синусы/косинусы $\neq 0$ или ± 1

Тогда модули sin и cos $\in (0; 1)$, при возведении десятичных дробей в степень значение уменьшается

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} \sin^3 x < \sin^2 x \\ \cos^3 x < \cancel{\sin}\cos^2 x \end{matrix}\right\} \Rightarrow (\sin^3 x + \cos^3 x) < \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1}$$

+

$$\Rightarrow \sin^3 x + \cos^3 x < 1$$

По аналогии: $\left.\begin{matrix} \sin^4 y < \sin^2 y \\ \cos^5 y < \cos^2 y \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin^4 y + \cos^5 y < \underbrace{\sin^2 y + \cos^2 y}_{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^4 y + \cos^5 y < 1$$

Итого вся левая часть в $* < 2$ и равенство не достигается $\Rightarrow$ этот случай не подходит!

Не доказано, что нет других корней

X и Y такие, что их синусы/косинусы могут быть равны 0 или ± 1

По ОТТ, если $\sin = \pm 1$, то $\cos = 0$ и наоборот

$\Downarrow$

• Нам подходят такие x, чтобы их sin или cos был $= 1$ (-1 не подходит, т.к. нечётная степень)

$$\Rightarrow \left[\begin{matrix} x = 2\pi k \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{matrix}\right. \quad k, n \in \mathbb{Z}$$

Тогда левая скобка в $*$ равна 1

• Нам подходят такие y, cos у которых $= 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sin = \pm 1$ (отриц. -1 подходит, т.к. степень чётная)
$\Rightarrow y = \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$

или cos которых $= 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sin = 0 \Rightarrow y = 2\pi l$; $l \in \mathbb{Z}$

Тогда правая скобка $= 1$ и общее рав-во $*$ выполн.

Ответ: $x = \left[\begin{matrix} 2\pi k \\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{matrix}\right.$; $k, n \in \mathbb{Z}$

$y = \left[\begin{matrix} 2\pi l \\ \frac{\pi}{2} + \pi m \end{matrix}\right.$; $l, m \in \mathbb{Z}$

шифр 10-11-15

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Вариант 2

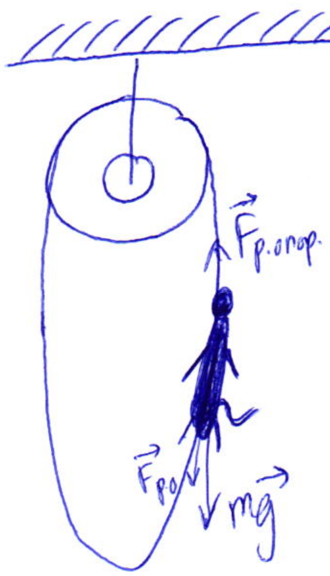
Страница 3

№4

Проследим за значением многочленов при $x=1$.
В начале: $F(1)=3$; в конце $F(1)=-199$
Заметим, что в процессе изменения многочленов мы уменьшаем /увеличиваем его значение на 1, тогда очевидно, что раз в начале $F(1)>0$, а в конце $F(1)<0$, то точно был многочлен, при котором $F(1)=0$, т.к. мы идём по ~~целым~~ целым значениям и не пропускаем ни одного, т.к. значение многочлена всегда изменяется строго на 1. Получаем, что был многочлен $P(x)$, у которого $P(1)=0$, т.к. старший коэф. не трогали, то все многочлены были квадратичными $\Rightarrow$ у многочлена $P(x)=0$ мог быть один корень, он равен $1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ подходит; или 2 корня, один из которых $=1$; свободный член и коэф. перед x всегда целые $\Rightarrow$ по т. Виета второй корень в паре с единицей также ± целый $\Rightarrow$ подходит $\Rightarrow$ ЧТД

Вид многочлена?

Ответ: да, верно!



№5

На обезьяну во время движения действует сила тяжести $m\vec{g}$ и $\vec{F}_{верёвки}$, т.к. обезьяна удерживается на одной высоте, а вдоль OX вообще не двигается => относительно земли она покоится и по II з.Н: $m\vec{g}+\vec{F}=0$, а по III з.Н. $-F=mg$ =>

Рассмотрим верёвку, все её точки двигаются с одинаковой скоростью, которую передаёт ей обезьяна, т.е. $P_{верёвки} = \frac{\Delta E}{\Delta t}$; $h=const \Rightarrow E_{пот}=0 \Rightarrow P_{вер} = \frac{\Delta E_{кин}}{\Delta t}$

$$E_{кин} = \frac{M v^2}{t} \Rightarrow P_{вер} = \frac{\Delta E_{кин}}{\Delta t} = M v \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Что касается мощности обезьяны, она определяется как $P_{обез} = mg \cdot v$

Тогда $P_{вер} = P_{обез} \Rightarrow M v \frac{\Delta v}{\Delta t} = mg v \Rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{mg}{M}$

в начальный момент времени при $t_0=0$: $v=0$ =>

$\Rightarrow$ при $t>0$: $v = \frac{mgt}{M} \Rightarrow P_{обез} = \frac{(mg)^2 \cdot t}{M} \Rightarrow P(3) =$

$$= \frac{(20 \cdot 10)^2 \cdot 3}{8} = \frac{\overset{100}{\cancel{200}} \cdot \overset{100}{\cancel{200}} \cdot 3}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2} = \frac{30000}{2} = 15000 \text{ Вт}$$

Ответ: 15000 Вт

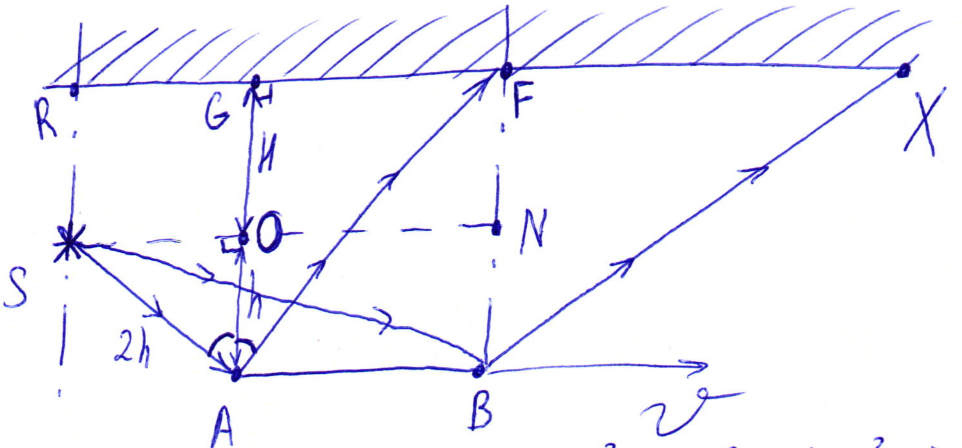
Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 10-11-15

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

Страница 4



Угол падения = углу отражс.

$\Rightarrow \angle SAO = \angle FAG \Rightarrow \triangle SOA \sim \triangle AGF$ по 2 углам

$\Rightarrow \frac{SO}{GF} = \frac{AO}{AG}$

$\triangle SOA$ - прямоугольный $\Rightarrow$ по теореме Пифагора: $SO^2 = AS^2 - AO^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow SO = \sqrt{4h^2 - h^2} = h\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

Тогда из подобия: $\frac{2\sqrt{3}}{GF} = \frac{h}{H+h} \Rightarrow GF = \frac{2\sqrt{3}(3+2)}{2} = 2{,}5 \cdot 2\sqrt{3} =$

$= 5\sqrt{3} = 2{,}5 SO$

Тогда $RF = GF + RG = GF + SO = 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

$\frac{SN}{FX} = \frac{AO}{AG}$: $\left.\begin{array}{l} SN = SO + AB = 2\sqrt{3} + AB \\ AO = h = 2 \\ AG = H + h = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow FX = \frac{SN \cdot AG}{AO} = (2\sqrt{3} + AB) \cdot \frac{5}{2} =$

$= 2{,}5(2\sqrt{3} + AB) = 5\sqrt{3} + 2{,}5AB$

Тогда $RX = RF + FX = SO + AB + FX = 2\sqrt{3} + AB + 5\sqrt{3} + 2{,}5AB =$

$= 7\sqrt{3} + 3{,}5AB$

Теперь по аналогии рассмотрим случай через $t = 4c$.

$SO_2' = SO' + 4 \cdot v = 2\sqrt{3} + 6$

$G_2F_2' = 2{,}5 S_2O_2' = 5\sqrt{3} + 15$

$R_2F_2' = SO' + G_2F_2' = 7\sqrt{3} + 15$

$S_2N_2' = SO_2' + AB = 2\sqrt{3} + 6 + AB$

$F_2X_2' = \frac{SN_2' \cdot (H+h)}{h} = 2{,}5 \cdot SN_2' = 5\sqrt{3} + 15 + 2{,}5AB$

$RX' = SN' + FX' = 7\sqrt{3} + 3,5AB + 21$

Начальные размеры:

$RX - RF = 7\sqrt{3} + 3,5AB - 7\sqrt{3} = 3,5AB$

Конечные размеры:

$RX' - RF' = 7\sqrt{3} + 3,5AB + 21 - (7\sqrt{3} + 15) = 3,5AB + 6$

Итого размеры зайчика изменились в $\frac{3,5AB+6}{3,5AB}$ раз

В зависимости от размеров зеркала:

$AB = 1 \Rightarrow$ увеличение $\approx 2,7$ раз

$AB = 2 \Rightarrow$ увеличение $\approx 1,8$ раз

и т.д.

Ответ: $\frac{3,5AB+6}{3,5AB}$