Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 58-11-07

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	10	13	13	14	10	15	15	10	100

без изменений

Безуглая

Вариант 1

№5

Дано:
$m = 30$ кг
$M = 5$ кг
$t = 2$ с
$F_{тр} = 0$
$v_0 = 0$

$P = ?$

Мощность через 2 сек. – это мгновенная мощность:

$P = A'(t)$

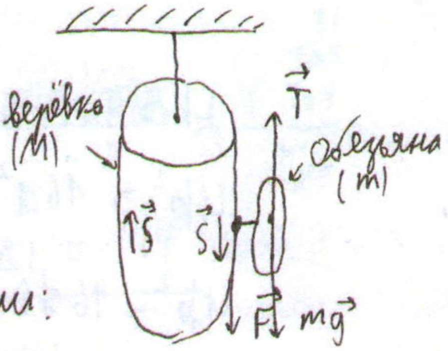
$A = F \cdot S \cdot \underset{1}{\cos\alpha} = F \cdot S$, где F – сила, действ. со стороны обезьяна на веревку, а S – перемещение веревки. Движется только верёвка, а $V_{обез} = 0$

По 2 з-ну Ньютона для верёвки:

$F = Ma \Rightarrow a = \frac{F}{M}$

По 3 з-ну Ньютона: $F = T$

По 2 з-ну Ньютона для обез. отн. Земли:



$T - mg = 0$, т.к. она не движется отн. Земли

$T = mg$

$a = \frac{mg}{M}$

$A = mg \cdot S$

$S = \underset{0}{v_0 t} + \frac{at^2}{2} = \frac{at^2}{2} = \frac{mgt^2}{2M}$

$A = \frac{m^2 g^2 \cdot t^2}{2M}$

$P = A'(t) = \frac{m^2 g^2 \cdot 2t}{2M} = \frac{m^2 g^2 t}{M} = \frac{30^2 \cdot 100 \cdot 2}{5} = \frac{90000 \cdot 2}{5} = 18000 \cdot 2 = 36$ кВт

№8

Р-е

Дано:

$\nu_1 = 2$ моль

$m_п = 0$, $F_{тр} = 0$

$T_1 = 300K$

$V_2 = 3V_1$

Т.к. 40% молек. расп. на атомы, то $\nu_2 = 1{,}4\nu_1$

$A = ?$

не пригодилось.

Т.к. $F_{тр} = 0$ и нагревали медленно, то $P = const$

$A = P\Delta V = P(V_2 - V_1) = P(3V_1 - V_1) = 2PV_1$

Согласно ур-ю Менд-Клап.:

$PV_1 = \underline{\nu_1 R T_1}$

$A = 2\nu_1 R T_1 = 2 \cdot 2 \cdot 8{,}31 \cdot 300 = 4 \cdot 831 \cdot 3 = 12 \cdot 831 =$

$= 9972$ Дж

$$\begin{array}{r} 831 \\ \times\ 12 \\ \hline 1662 \\ +831 \\ \hline 9972 \end{array}$$

это решение лучше авторского!

№1

$2b > 4a + c > 0$

Д-ть: $b^2 > 4ac$

Док-во:

$2b > 4a + c$, возведем в кв.

$4b^2 > 16a^2 + 8ac + c^2 \quad | -16ac$

$4b^2 - 16ac > 16a^2 - 8ac + c^2$

$4(b^2 - 4ac) > (4a - c)^2$

$b^2 - 4ac > \frac{(4a-c)^2}{4}$

По усл $4a + c > 0$, $4a > -c$ $\Rightarrow \frac{(4a-c)^2}{4} \geq 0$

$\Downarrow$

$b^2 - 4ac > 0$, $\underline{b^2 > 4ac}$ ч.т.д.

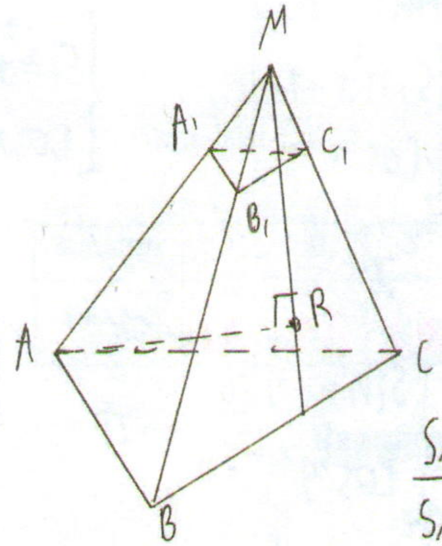
№3

Дано:

$V_{MABC} = 324$

$V_{MAB_1C_1} = 96$

$V_{MAB_1C_1} = ?$



Р-е

Проведём $AR \perp (MBC)$, тогда

$V_{MAB_1C_1} = \frac{1}{3} AR\, S_{MB_1C_1}$

$V_{MABC} = \frac{1}{3} AR\, S_{MBC}$

$\frac{S_{MB_1C_1}}{S_{MBC}} = K^2$, $\frac{V_{MA_1B_1C_1}}{V_{MABC}} = K^3 = \frac{96}{324} =$

$= \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \Rightarrow K = \frac{2}{3}$

$\frac{S_{MB_1C_1}}{S_{MBC}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$, $S_{MB_1C_1} = \frac{4}{9} S_{MBC}$

$$\left.\begin{aligned} V_{MAB_1C_1} &= \frac{1}{3} AR \cdot \frac{4}{9} S_{MBC} \\ V_{MABC} &= \frac{1}{3} AR \cdot S_{MBC} \end{aligned}\right| :$$

$\frac{V_{MAB_1C_1}}{V_{MABC}} = \frac{\cancel{3AR} \cdot 4 \cancel{S_{MBC}}}{\cancel{3AR} \cdot 9 \cancel{S_{MBC}}} = \frac{4}{9}$, $V_{MAB_1C_1} = \frac{4 V_{MABC}}{9} = \frac{4 \cdot 324}{9} =$

$= 4 \cdot 36 = 144$

Ответ: $V_{MAB_1C_1} = 144$

№2

$$\begin{cases} \sin^4 x + \sin^5 y = 1 \\ \cos^3 x + \cos^7 y = 1 \end{cases}$$

$\sin^4 x + \cos^3 x + \sin^5 y + \cos^7 y = 2$

$\sin^4 x + \cos^3 x + \sin^5 y + \cos^7 y = \cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 y + \sin^2 y$

$(\sin^4 x - \sin^2 x) + (\cos^3 x - \cos^2 x) + (\sin^5 y - \sin^2 y) + (\cos^7 y - \cos^2 y) = 0$

$\sin^2 x(\sin^2 x - 1) + \cos^2 x(\cos x - 1) + \sin^2 y(\sin^3 y - 1) + \cos^2 y(\cos^5 y - 1) = 0$

1) $-1 \le \sin x \le 1$
$0 \le \sin^2 x \le 1$
$-1 \le \sin^2 x - 1 \le 0$

2) $-1 \le \cos x \le 1$
$-2 \le \cos x - 1 \le 0$

3) $-1 \le \sin y \le 1$
$0 \le \sin^2 y \le 1$
$-1 \le \sin^2 y - 1 \le 0$

4) $-1 \le \cos y \le 1$
$-1 \le \cos^5 y \le 1$
$-2 \le \cos^5 y \le 0$

Перечислим все возможные р-я.

$\begin{cases}\sin^2 x=0\\ \cos^2 x=0\end{cases} - \varnothing$ $\quad \begin{cases}\sin^2 x=0\\ \cos x-1=0\end{cases} \Downarrow x=2\pi n$ $\quad \begin{cases}\sin^2 x-1=0\\ \cos^2 x=0\end{cases} \Downarrow x=\frac{\pi}{2}m$ $\quad \begin{cases}\sin^2 x-1=0\\ \cos x-1=0\end{cases} - \varnothing$

$\begin{cases}\sin^2 y=0\\ \cos^2 y=0\end{cases} - \varnothing$ $\quad \begin{cases}\sin^2 y-1=0\\ \cos^2 y=0\end{cases} \Downarrow y=\frac{\pi}{2}k$ $\quad \begin{cases}\sin^2 y-1=0\\ \cos^5 y-1=0\end{cases} - \varnothing$ $\quad \begin{cases}\sin^2 y=0\\ \cos^5 y-1=0\end{cases} \Downarrow y=2\pi l$

Сделаем проверку найденных р-й:

$(2\pi n;\frac{\pi}{2}k)$, $(2\pi n; 2\pi l)$, $(\frac{\pi}{2}m;\frac{\pi}{2}k)$, $(\frac{\pi}{2}m; 2\pi l)$

1) $(2\pi n;\frac{\pi}{2}k) \Rightarrow \begin{cases}0+1=1\\1+0=1\end{cases}$ – верно

2) $(2\pi n; 2\pi l) \Rightarrow \begin{cases}0+0=1\\1+1=1\end{cases}$ – неверно

3) $(\frac{\pi}{2}m;\frac{\pi}{2}k) \Rightarrow \begin{cases}1\pm1=1\\0+0=1\end{cases}$ – неверно

4) $(\frac{\pi}{2}m; 2\pi l) \Rightarrow \begin{cases}1+0=1\\0+1=1\end{cases}$ – верно

Ответ: $(2\pi n;\frac{\pi}{2}k)$, $(\frac{\pi}{2}m; 2\pi l)$, $n,k,l,m\in Z$

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

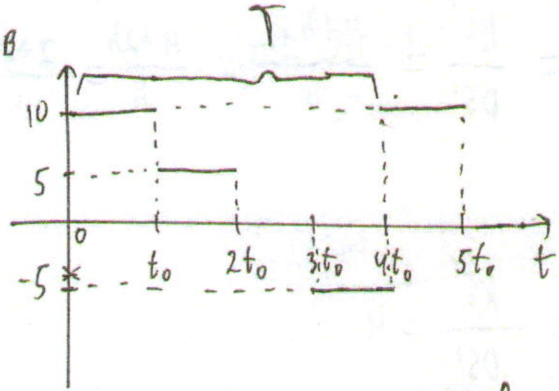
шифр 58-11-07

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

№7

Р-е



действующее напряжение – это такое постоян. напряж., при котором за некоторое время выдел. в цепи столько же теплоты, сколько и при перемен. (колеб.) напряж. за T,

т.е. $Q = \frac{U_д^2}{R}\cdot t \overset{T}{=} \frac{U_д^2}{R}\cdot 4t_0$

При меняющимся напряж по рис. в течение интервалов t_0, напряж. были постоянными, поэтому

$$Q = \frac{U_1^2}{R}t_0 + \frac{U_2^2}{R}t_0 + \frac{U_3^2}{R}t_0 + \frac{U_4^2}{R}t_0$$

$$\frac{U_д^2}{\cancel{R}}\cdot 4\cancel{t_0} = \frac{U_1^2}{\cancel{R}}\cancel{t_0} + \frac{U_2^2}{\cancel{R}}\cancel{t_0} + \frac{U_4^2}{\cancel{R}}t_0 \quad \Big| \cdot \frac{R}{t_0}$$

$$4U_д^2 = U_1^2 + U_2^2 + U_4^2$$

$$\Downarrow$$

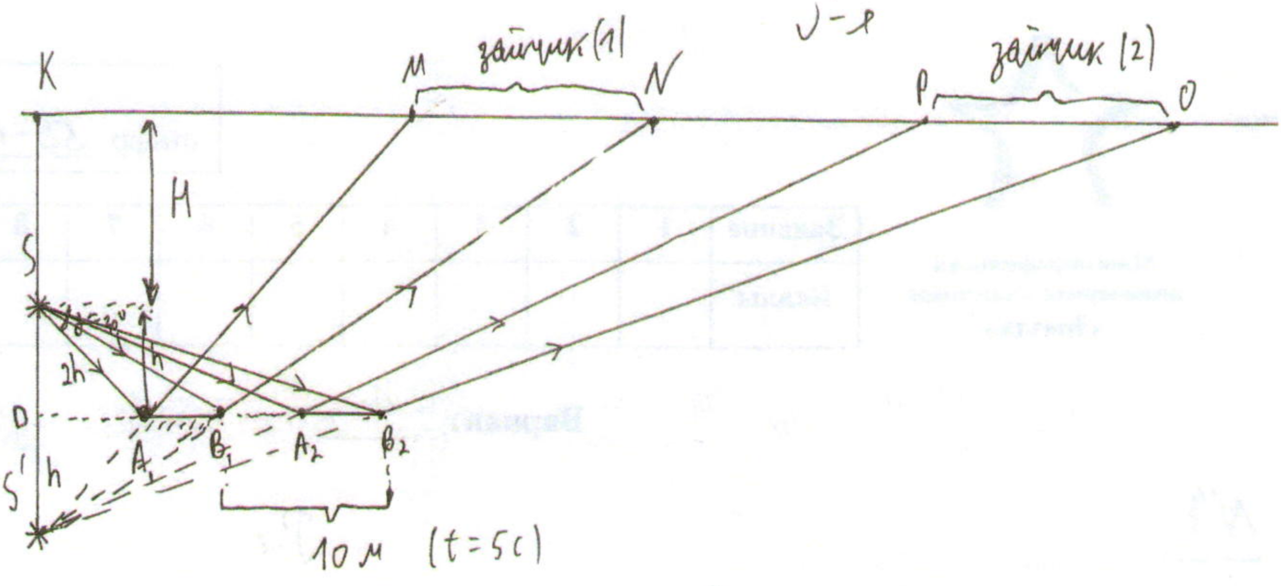
$$U_д = \sqrt{\frac{U_1^2+U_2^2+U_4^2}{4}} = \sqrt{\frac{100+25+25}{4}} = \sqrt{\frac{150}{4}} = \sqrt{\frac{75}{2}} = 5\sqrt{\frac{3}{2}}\ B$$

№6

Дано:
$H = 2$ м
$h = 1$ м
$V = 2$ м/с
$SA = 2h$
$t = 5$ с

$\frac{MN}{PO} = ?$

$\frac{PO}{MN} = ?$



$\Delta S'PO \sim \Delta S'A_2B_2 \Rightarrow \frac{PO}{A_2B_2} = \frac{KS'}{DS'} = \frac{H+h+h}{h} = \frac{H+2h}{h} = \frac{2+2\cdot1}{1} = 4.$

$PO = 4A_2B_2$

$\Delta S'MN \sim \Delta S'A_1B_1 \Rightarrow \frac{MN}{A_1B_1} = \frac{KS'}{DS'} = 4$

$MN = 4A_1B_1$

размер зеркала

$\frac{PO}{MN} = \frac{4A_2B_2}{4A_1B_1} = 1$

$\Downarrow$

размеры зайчика не изменились

№4

Пусть дан многочлен $x^2 + bx + c$. В результате действия датчика разность $b - c$ увеличивается или уменьшается на 1

1) $x^2 + 20x + 22 \Rightarrow b - c = 20 - 22 = -2 < 0$

2) $x^2 + 202x + 2 \Rightarrow b - c = 202 - 2 = 200 > 0$

Т.к разность имеет противоположные знаки, то обязательно ~~наблюдае~~ найдется многочлен для которого $b - c = 1$

$x^2 + (c+1)x + c = 0$, $c \in \mathbb{Z}$

№4

$D = c^2 + 2c + 1 - 4c = (c-2)^2$

$x_{1,2} = \frac{-c-1 \pm |c-2|}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -c \\ x_2 = -1 \end{matrix} \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ ответ утвердительный

Примеры: $x^2 + 23x + 22$

$x^2 - 9x - 10$

....