①

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр ТПО-11-05

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	10	3	13	12	10	15	10	15	88

Вариант 1

Задание №1.

$2b > 4a + c > 0$. Доказать, что $b^2 > 4ac$.

$2b > 4a + c$

$4b^2 > 16a^2 + 8ac + c^2$

$b^2 > 4a^2 + 2ac + \frac{c^2}{4}$ (1).

Докажем, что $4a^2 + \frac{c^2}{4} \geq 2ac$

+

$4a^2 - 2ac + \frac{c^2}{4} \vee 0$

$(2a - \frac{c}{2})^2 \vee 0$

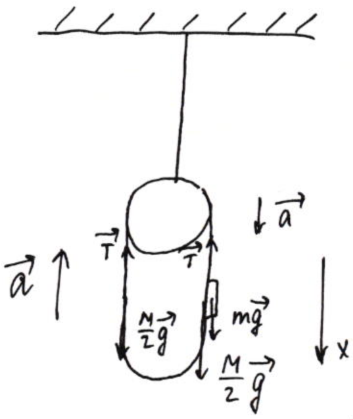
$(2a - \frac{c}{2})^2 \geq 0 \Rightarrow 4a^2 + \frac{c^2}{4} \geq 2ac$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow 4a^2 + 2ac + \frac{c^2}{4} \geq 4ac$

$b^2 > 4a^2 + 2ac + \frac{c^2}{4}$

$b^2 > 4ac$, ч.т.д.

№5



По II з-ну Ньютона для середины правой части верёвку, которой карабкается обезьяна:

$\frac{M}{2}\vec{g} + m\vec{g} + \vec{T} = \frac{M}{2}\vec{a}$

Ox: $\frac{Mg}{2} + mg - T = \frac{ma}{2}$. (1)

Для левой части верёвки:

Ox: $\frac{Mg}{2} - T = -\frac{Ma}{2}$. (2)

(1),(2) $\Rightarrow$ $mg = Ma$, $a = \frac{m}{M}g$. (3)

Т.к. в начале верёвка находилась в покое, то после того, как обезьяна начала карабкаться скорость верёвки будет равна $v = at$. (4)

Мощность, развив-ая обезьяной: $N = F \cdot v$. (5)

(3), (4), (5) $\Rightarrow N = F \cdot \frac{m}{M} \cdot g \cdot t$, $F = mg$, $\Rightarrow N = \frac{(mg)^2}{M}t$.

$N = \frac{(30 \cdot 10)^2}{5} \cdot 2 = 36000$ Вт.

Ответ: 36000 Вт. +

N8

Дано:

$\nu_1 = 2$ моль,

$T_1 = 300 K$,

$V_2 = 3V_1$,

$\alpha = 40\%$

$A - ?$

Решение:

Т.к. в процессе нагревания диссоциировало 40% молекул, то $\nu_2 = \nu_1(1+\frac{\alpha}{100}) = 1,4\nu_1 = 2,8$ моль.

Т.к. нагревание происходит в сосуде под поршнем, то $p = const$.

По ур-ию Менделеева-Клапейрона:

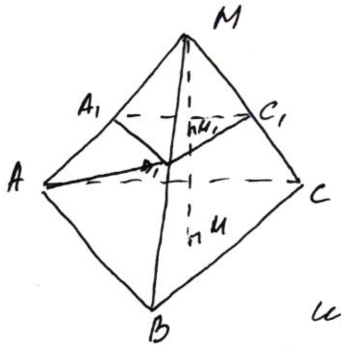
$$\frac{\nu_1 R T_1}{V_1} = \frac{\nu_2 R T_2}{V_2} \Rightarrow T_2 = \frac{V_2 \nu_1 T_1}{V_1 \nu_2} = \frac{3\cdot 2\cdot 300}{2,8} = 643 K.$$

Т.к. $p = const$: $A = p\Delta V = pV_2 - pV_1 = \nu_2 R T_2 - \nu_1 R T_1 =$

$= (2,8\cdot 8,31\cdot 643) - (2\cdot 8,31\cdot 300) = 9975$ Дж.

Ответ: 9975 Дж.

N3



Опустим $MH \perp (ABC)$. $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow MH \perp (A_1B_1C_1)$. и $MH \cap (A_1B_1C_1) = H_1$

$V_{MA_1B_1C_1} = \frac{1}{3} S_{A_1B_1C_1} \cdot MH_1$.

$V_{MABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot MH$.

Пирамиды $MABC$ и $MA_1B_1C_1$ – подобны $\Rightarrow$ их объёмы относятся как куб коэф-та подобия:

$$\frac{V_{MA_1B_1C_1}}{V_{MABC}} = k^3 \Rightarrow k = \sqrt[3]{\frac{96}{324}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{MH_1}{MH} = \frac{2}{3}.$$

$MH_1 = 2x$, $MH = 3x$, $HH_1 = x$.

+

$V_{MAB_1C_1} = V_{MA_1B_1C_1} + V_{AB_1C_1A_1}$

$V_{AB_1C_1A_1} = \frac{1}{3} h \cdot S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{3} HH_1 \cdot S_{A_1B_1C_1}$

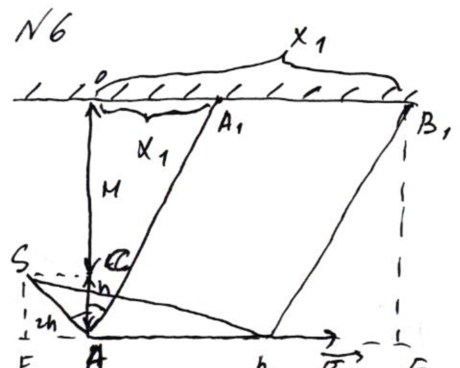
$V_{MAB_1C_1} = \frac{1}{3} S_{A_1B_1C_1} \cdot 2x + \frac{1}{3} S_{A_1B_1C_1} \cdot x = \frac{1}{3} \cdot 3x \cdot S_{A_1B_1C_1} = x \cdot S_{A_1B_1C_1}$. (1)

$V_{MA_1B_1C_1} = \frac{1}{3} S_{A_1B_1C_1} \cdot 2x \Rightarrow x = \frac{3V_{MA_1B_1C_1}}{2S_{A_1B_1C_1}} = \frac{144}{S_{A_1B_1C_1}}$. (2)

(1), (2) $\Rightarrow V_{MAB_1C_1} = \frac{144}{S_{A_1B_1C_1}} \cdot S_{A_1B_1C_1} = 144$.

Ответ: 144.

N6



$SC = \sqrt{(2h)^2 - h^2} = h\sqrt{3}$.

$\triangle ASC \sim \triangle AA_1O$ (как прямоуг-ые с $\angle SAC = \angle A_1AO$).

$\frac{SC}{AC} = \frac{OA_1}{OA}$, $OA_1 = h\sqrt{3} \cdot \frac{h+H}{h} = \sqrt{3} \cdot \frac{3}{1} = 3\sqrt{3}$.

$\triangle SBE \sim \triangle B_1BE_1$:

$\frac{SE}{B_1E_1} = \frac{BE}{BE_1}$, $\frac{h}{3h} = \frac{AB + h\sqrt{3}}{BE_1}$,

$BE_1 = 3AB + 3\sqrt{3}h = 3AB + 3\sqrt{3}$.

$d_1 = AB + BE_1 - OA_1 = 3AB + 3\sqrt{3} + AB - 3\sqrt{3} = 4AB$.

↓

②

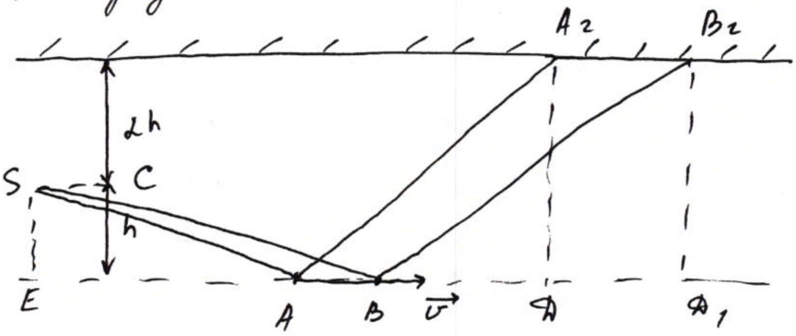
шифр ТГО-11-05

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

№6 (продолжение)



$\triangle SAE \sim A_2AD$:

$\frac{SE}{A_2D} = \frac{AE}{AD}$.

$\frac{h}{3h} = \frac{vt + h\sqrt{3}}{AD}$,

$\frac{1}{3} = \frac{10 + \sqrt{3}}{AD}$,

$AD = 30 + 3\sqrt{3}$.

$\triangle SBE \sim \triangle B_2BD_1$:

$\frac{SE}{B_2D_1} = \frac{BE}{BD_1}$, $BD_1 = \frac{3h}{h}(\sqrt{3} + 10 + AB)$,

$BD_1 = 3\sqrt{3} + 30 + 3AB$.

$d_2 = \cancel{BD_1 - AD = 3\sqrt{3} + 30 + 3AB - 30 - 3\sqrt{3} = 3AB}$. $3\sqrt{3}+30+3AB+AB+10-30-3\sqrt{3}-10 = 4AB$

$\frac{d_2}{d_1} = \frac{4AB}{4AB} = 1$

Ответ: у не изменились ~~изменились в 0,75 раз~~.

№7

Мощность пост. тока $P = \frac{U^2}{R}$. В случае переменного тока:

$\overline{P} = \frac{\overline{U^2}}{R}$, т.е. мощность тока определяется средним квадратом напряжения.

$U_д = \sqrt{\overline{U^2}}$

Отсюда следует, что $\overline{U^2} = \frac{10^2 \cdot t_0 + 5^2 \cdot t_0 + 0 \cdot t_0 + (-5)^2 t_0}{4t_0} = \frac{150}{4} (В^2)$.

$U_д = \sqrt{\frac{150}{4}} = 6,1$ (В).

Ответ: $U_д = 6,1$ (В).

№2

$$\begin{cases} \sin^4 x + \sin^5 y = 1 \\ \cos^3 x + \cos^7 y = 1 \end{cases}$$

Сложим уравнения и оценим левую часть: ±

$\sin^4 x + \sin^5 y + \cos^3 x + \cos^7 y = 2$.

$\sin^4 x + \cos^3 x \le 1$?, аналогично Почему? $\sin^5 y + \cos^7 y \le 1$.

Равенство выполняется только в случаях, когда $\sin^4 x + \cos^3 x = 1$ и

$\sin^5 y + \cos^7 y = 1.$

$$\begin{cases} \sin^4 x + \cos^3 x = 1 \\ \sin^5 y + \cos^7 y = 1 \end{cases}$$

Этой системе удовлетворяют только такие пары чисел: $(\frac{\pi}{2} + \pi k; 2\pi n)$ и $(2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi n)$, где $k, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $(\frac{\pi}{2} + \pi k; 2\pi n)$, $(2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi n)$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

№4

Начальный квадр. трёхчлен: $x^2 + 20x + 22$

Конечный квадр. трёхчлен: $x^2 + 202x + 2$

Квадратный трёхчлен вида $ax^2 + bx + c$ с $a = 1$, будет иметь целые корни при $b - c = 1$. Почему? В начальном трёхчлене $b - c = -2$, в конечном – $b - c = 200$. ~~То есть идя от -2 д~~ За один ход мы можем менять разность на 1, поэтому по дискретной непрерывности ~~мы получим из $b-c=20$~~ если мы получим из $b - c = -2$ разность $b - c = 200$, то в процессе мы обязательно получим $b - c = 1$, т.е. корни у такого трёхчлена будут целые, т.е. верно, что мы получим трёхчлен с целыми корнями.

Ответ: верно

±