Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 58-11-12

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	10	13	13	14	10	10	15	10	95

без изменений

Вариант 1 без изменений

№1

$2b > 4a + c > 0$

$4b^2 > (4a+c)^2$

$4b^2 - 16ac > 16a^2 - 8ac + c^2$

$4(b^2 - 4ac) > (4a-c)^2$

$$\begin{cases} b^2 - 4ac > \dfrac{(4a-c)^2}{4} \\ (4a-c)^2 \geq 0 \end{cases}$$

$b^2 - 4ac > 0$

$b^2 > 4ac$ ч.т.д.

10б

№2

Исходная система равносильна системе:

$$\begin{cases} (\sin^4 x + \cos^3 x) + (\sin^5 y + \cos^7 y) = 2 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \cos^2 y + \sin^2 y = 1 \\ |\sin x| \leq 1; |\cos x| \leq 1 \\ |\sin y| \leq 1; |\cos y| \leq 1 \end{cases}$$

$\Downarrow$

1) $\sin^4 x + \cos^3 x = 1$

$\Downarrow$

$\begin{cases} \sin^4 x = 0 \\ \cos^3 x = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} \sin^4 x = 1 \\ \cos^3 x = 0 \end{cases}$

$x = 2\pi n$ $\qquad$ $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in Z$

2) $\sin^5 y + \cos^7 y = 1$

$\Downarrow$

$\begin{cases} \sin^5 y = 0 \\ \cos^7 y = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} \sin^5 y = 1 \\ \cos^7 y = 0 \end{cases}$

$y = 2\pi k$ $\qquad$ $y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k \in Z$

$\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right); \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n; 2\pi k\right); \left(2\pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right); (2\pi n; 2\pi k)$

3) Проверка:

13б

Осуществив проверку (подставив получившиеся значения в исходное уравнение), увидим, что при $\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$ и $(2\pi n; 2\pi k)$ уравнение не соответствует условию.

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n; 2\pi k\right); \left(2\pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$ где $n \in Z$, $k \in Z$

№3

Дано:

$(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$

$V_{MABC} = 324$

$V_{MA_1B_1C_1} = 96$

Найти:

$V_{MA_1B_1C_1}$ – ?

Решение

1) $\triangle MA_1B_1 \sim \triangle MAB$, т.к. $\angle M$ – общий, $A_1B \parallel AB$

2) Из подобия следует, что:

$$\frac{S_{MA_1B_1}}{S_{MAB}} = \left(\frac{A_1B_1}{AB}\right)^2$$

3) Аналогично $\triangle A_1MC_1 \sim \triangle MAC$; $\triangle B_1MC_1 \sim \triangle MBC \Rightarrow \frac{S_{MB_1C}}{S_{MBC}} = \left(\frac{MC_1}{MC}\right)^2 = \left(\frac{MA_1}{MA}\right)^2 = \left(\frac{A_1B_1}{AB}\right)^2 = k$

4) Проведем $MH \perp (ABC)$ и отметим на ней $L \in (A_1B_1C_1)$, а также проведем A_1L и AH

5) $\triangle MLA_1$ и $\triangle MHA$ – прямоугольное, т.к. $ML \perp A_1L$ и $MH \perp AM$

5) $\triangle MLA_1 \sim \triangle MHA$, т.к $\angle MHA = \angle MLA = 90^\circ$, ~~$(ABC) \parallel (A_1B_1C_1) \Rightarrow A_1L \parallel$~~

$\angle A_1ML = \angle AMH$, $\angle MA_1L = \angle MAH$, т.к $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$ и $A_1L \parallel AM$

7) Из подобия следует, что

$$\frac{MA_1}{MA} = \frac{ML}{MH} = k$$

8) $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$, т.к. $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k$

9) $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \left(\frac{A_1B_1}{AB}\right)^2 = k^2$

10) $\begin{cases} V_{MABC} = \frac{1}{3} MH \cdot S_{ABC} \\ V_{MA_1B_1C_1} = \frac{1}{3} ML \cdot S_{A_1B_1C_1} \end{cases}$

$\frac{V_{MA_1B_1C_1}}{\ } = \frac{96}{\ } = k^3 = \frac{8}{\ } \Rightarrow k = \frac{2}{\ }$

$$\left.\begin{array}{l} V_{MABC} = \frac{1}{3}\rho(A;\ldots)\cdot S_{MBC} \\ V_{MA_1B_1C_1} = \frac{1}{3}\rho(A;(MB_1C_1))\cdot S_{MB_1C_1} \\ \rho(A;(MBC)) = \rho(A;(MB_1C_1))\ (\text{т.к. } (MB_1C_1)\in(MBC)) \\ \frac{S_{MBC}}{S_{MB_1C_1}} = k^2 \end{array}\right\} V_{MAB_1C_1} = k^2\cdot V_{MABC} = 144$$

Ответ: 144

13б

№9

1) Введем обозначения

$x^2+b_1x+c_1 \Rightarrow x^2+b_2x+c_2 \Rightarrow \ldots\ldots \Rightarrow x^2+b_nx+c_n$, где $b_1=20$; $c_1=22$, $b_n=202$, $c_n=2$

2.) Рассмотрим b_n-c_n

$b_1-c_1=20-22=-2$

.....

b_k-c_k

.....

$b_n-c_n=202-2=200$

Т.е. в каждой операции происходит изменение разности $\pm 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ существует некая $b_k-c_k=1$, т.е. $b_k=1+c_k$

3) $x^2+(c_k+1)x+c_k=0$

$$D = c_k^2+2c_k+1-4c_k = c_k^2-2c_k+1=(c_k-1)^2$$

$$x=\frac{-c_k-1\pm(c_k-1)}{2} \Rightarrow x_1=\frac{-c_k-1-c_k+1}{2}=-c_k-1$$

$$x_2=\frac{c_k-1+c_k-1}{2}=c_k$$

, то есть $x=c_k$, т.е. x - целое число
либо
$x=-c_k-1$, т.е. x - целое число

Пример: $x^2+23+22$, где $x=-1$ и $x=-22=-c$

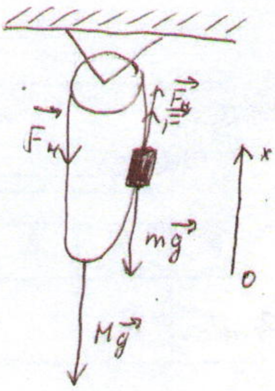
Ответ: да, возможно

14б

№5

Дано:
$t = 2c$
$M = 5кг$
$m = 30кг$
$g = 10 м/с^2$
$v_0 = 0$

N - ?



1) $N = F \cdot v$, где F - сила, действующая на веревку со стороны обезьяны; v - скорость веревки

2) $\left.\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ v_0 &= 0 \end{aligned}\right\} v = at$

3) По III з. Ньютона

$F = F_н$

4) По II з. Ньютона для обезьяны

$$\begin{cases} m\vec{a} = \vec{F_R} \\ \vec{F_R} = \vec{F_н} + m\vec{g} \end{cases}$$

$OX: 0 = F_н - mg$

$F_н = mg = F$

По II з. Ньютона для веревки

5) $a = \frac{F}{M} \Rightarrow v = \frac{mgt}{M}$

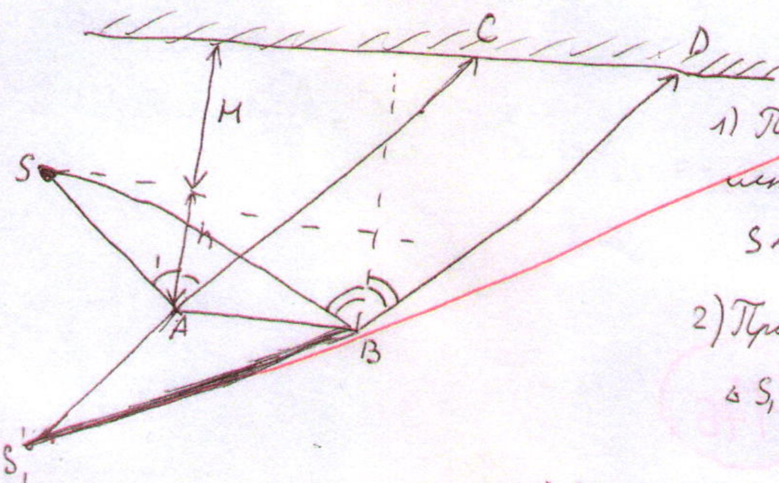
6) $\left.\begin{aligned} N &= F \cdot v \\ v &= \frac{mgt}{M} \\ F &= mg \end{aligned}\right\} \Rightarrow N = \frac{m^2 g^2 t}{M} = \frac{900 \cdot 100 \cdot 2}{5} = 36\,000$ (Вт)

Ответ: 36 кВт

№6

Дано:
$H = 2м$
$h = 1м$
$v = 2 м/с$
$SA = 2м$
$AB = A'B'$
$l = 5м$

$\frac{CD'}{CD}$ - ?



1) Построим мнимый источник тока S_1' так, чтобы $SA = S_1'A$, $S_1'B = SB$.

2) Проведем $S_1'C$ и $S_1'D$, тогда:

$\triangle S_1'AB \sim \triangle S_1'CD$ ($\angle AS_1'B = \angle CS_1'D$; $AB \parallel C$
$\Downarrow$
$\angle S'AB = \angle S$
$\angle S_1'BA = \angle S$

3) Из подобия следует, что

$\frac{AB}{}$,

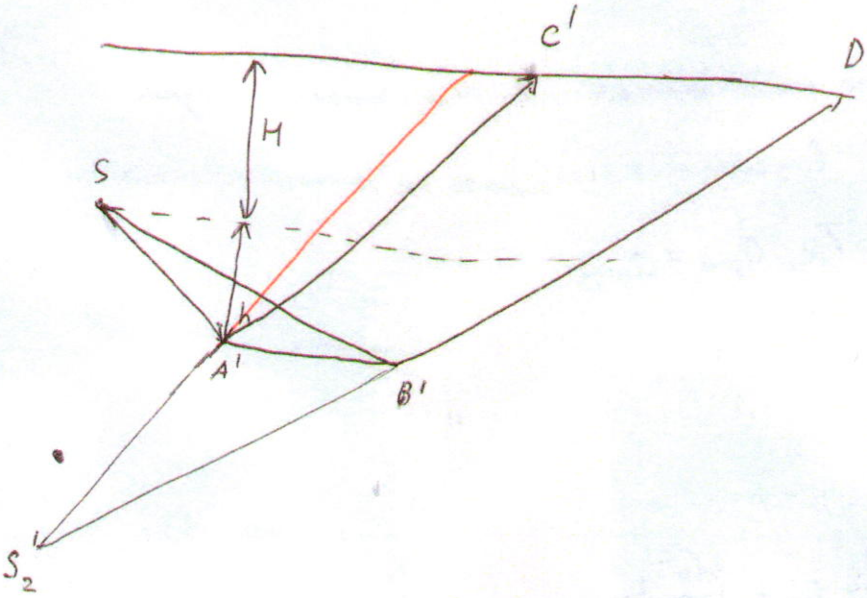
Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр______________

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант ______

№6 (продолжение)



4) Построим S_2' аналогично S_1'.

5) Проведем $S_2'C$ и $S_2'D$, тогда:

$\triangle S_2'A'B' \sim \triangle S_2'C'D'$ ($\angle A'S_2'B' = \angle C'S_2'$

$A'B' \parallel C'D' \Rightarrow A'C'D' = \angle S_2'A$

$\angle B'D'C' = \angle S_2'B'$

6) Из подобия следует, что

$$\frac{C'D'}{A'B'} = k_2$$

10 из 15

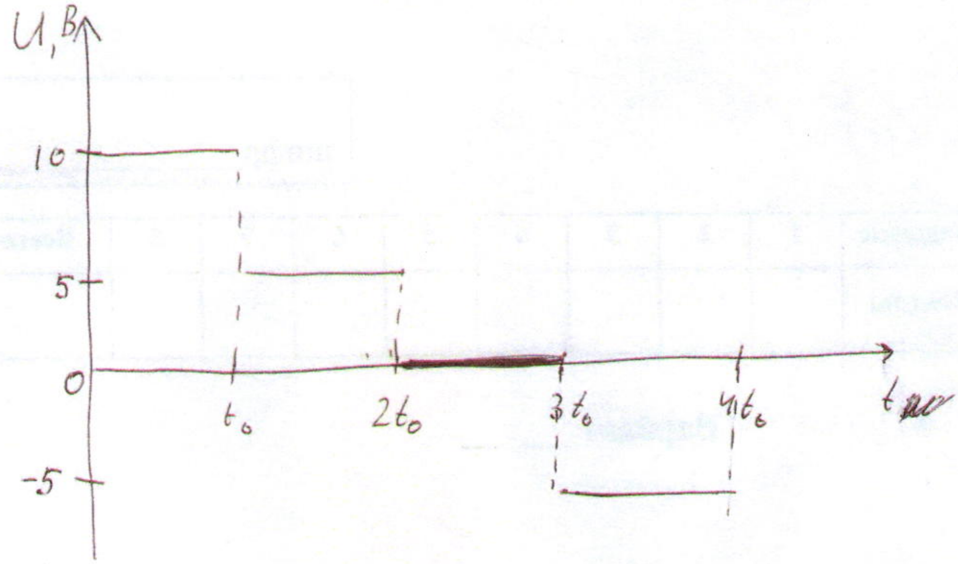
7) т.к. $A'B' = AB$, можно предположить, что

$$\frac{C'D'}{AB} = \frac{CD}{AB} = k_2 = k_1,$$ то есть вероятнее всего $$\frac{C'D'}{CD} = 1$$

Ответ: вероятнее всего размеры не изменятся

№7

~~Дано~~



1) Действующее напряжение, это такое постоянное напряжение, при котором за такое же время выделяется столько же теплоты, сколько и при переменном напряжении. Т.е. $Q_{дей} = Q_{пер}$

2) $Q_{дей} = Q_{пер}$

$$\Downarrow$$

15

$$\frac{U_д}{R}\cdot 4t_0 = \frac{U_1^2}{R}t_0 + \frac{U_2^2}{R}t_0 + \frac{U_3^2}{R}t_0 + \frac{U_4^2}{R}t_0$$

$$U_д = \sqrt{\frac{U_1^2+U_2^2+U_3^2+U_4^2}{4}} = \sqrt{\frac{100+25+0+25}{4}} = \sqrt{\frac{150}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{6} = 2{,}5\sqrt{6}\ (В)$$

Ответ: $2{,}5\sqrt{6}$ В

№8

Дано

$F_{тр} = 0$

$\nu_1 = 2$ моль

$\nu_2 = 2,8$ моль

$T_1 = 300\,K$

$V_1 = V$

$V_2 = 3V$

$A - ?$

1) т.к. $F_{тр} = 0$, то $p = const$

2) $\left.\begin{aligned} A &= p\Delta V \\ \Delta V &= V_2 - V_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = 2pV$

~~3) $pV_1 = \nu_1 RT_1$~~

~~$\Downarrow$~~

~~$pV = 2\cdot 8,31\cdot 300 = 4986\ (Па\cdot м^3)$~~

~~4) $A = 2pV = 2\cdot 4986 = 9972$ (Дж)~~

По ур-ию Менделеева-Клайперона

3) $pV_1 = \nu_1 RT_1$

$\Downarrow$

$pV = \nu_1 RT_1$

$\Downarrow$

$A = 2\nu_1 RT_1 = 2\cdot 2\cdot 8,31\cdot 300 = 9972$ (Дж)

10

Ответ: 9972 Дж