Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 78-11-15

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	10	13	13	0	10	15	10	15	86

Вариант 2

без изменений

без изменений

№1) Известно, что $3b > 9a + c > 0$. Докажите, что $b^2 > 4ac$

Доказательство

$3b > 9a + c > 0$

$b > 3a + \frac{c}{3} > 0$

$b^2 > 9a^2 + 2ac + \frac{c^2}{9}$

10

Докажем, что

$9a^2 + \frac{c^2}{9} \geq 2ac$ Найдём разность между л.ч и пр.ч

$\frac{81a^2 + c^2 - 18ac}{9} \geq 0$, т.к $\frac{(9a-c)^2}{9} \geq 0 \Rightarrow$ л.ч > пр.ч

Таким образом $b^2 > \underset{\underset{2ac}{\vee\!|}}{\left(9a^2 + \frac{c^2}{9}\right)} + 2ac$, след.,

$b^2 > 4ac$

ЧТД

№2) Решить систему уравнений $\begin{cases} \sin^3 x + \sin^4 y = 1 \\ \cos^3 x + \cos^5 y = 1 \end{cases}$

Решение.

Очевидно $\cos x \geq 0$, $\cos y \geq 0$, причём одновременно не могут быть равны нулю.

Если $\sin y = \pm 1$, то $\sin x = 0$, $\cos y = 0$, $\cos x = 1$

то есть $\begin{cases} x = 2\pi n \\ y = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}$, $n, k \in \mathbb{Z}$

Если $\sin y = 0$, то $\cos y = 1$, $\sin x = 1$, $\cos x = 0$

то есть $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m \\ y = 2\pi l \end{cases}$, $m, l \in \mathbb{Z}$

13

Докажем, что данная система не имеет других решений.

1) Пусть $|\sin y| < 1$, $\sin y \neq 0$ то след. $\sin^4 y < \sin^2 y$, след.,

$1 = \sin^3 x + \sin^4 y < \sin^3 x + \sin^2 y$, след., $1 - \sin^2 y < \sin^3 x$, след.,

$\cos^2 y < \sin^3 x$

$\left.\begin{matrix} |\sin y| < 1 \\ \sin y \neq 0 \end{matrix}\right| \Rightarrow \left.\begin{matrix} \cos y \neq 0 \\ |\cos y| < 1 \end{matrix}\right| \Rightarrow \cos^5 y < \cos^2 y < \sin^3 x$

$\Rightarrow \sin^3 x - \cos^5 y > 0$

$\sin^3 x + \sin^4 y = 1 = \cos^3 x + \cos^5 y$

$\sin^3 x - \cos^5 y = \cos^3 x - \sin^4 y > 0 \quad (*)$

Покажем, что $\sin^3 x - \cos^5 y < 0$

$1 = \sin^3 x + \sin^4 y < \sin^2 x + \sin^4 y$, след., $1 - \sin^2 x < \sin^4 y$, т.е. $\cos^2 x < \sin$

Получим, что $\cos^3 x < \cos^2 x < \sin^4 y$, след., $\sin^4 y - \cos^3 x > 0$

след., $\cos x - \sin y \le 0$

Получим противоречие со (*)

2) Аналогично,

Пусть $|\sin x| < 1$ $\sin x \neq 0$ (когда $\sin x > 0$)

$\sin^3 x < \sin^2 x$

$1 = \sin^3 x + \sin^4 y < \sin^2 x + \sin^4 y$, след., $1 - \sin^2 x < \sin^4 y$; $\cos^2 x < \sin^4 y$

$\cos^3 x < \cos^2 x < \sin^4 y$; $\sin^4 y - \cos^3 x > 0$ (**)

Покажем, что при заданных условиях $\sin^4 y - \cos^3 x < 0$

$1 = \sin^4 y + \sin^3 x < \sin^2 y + \sin^3 x$, след., $\cos^2 y < \sin^3 x$

$\cos^5 y < \cos^2 y < \sin^3 x$, т.е. $\sin^3 x - \cos^5 y = \cos^3 x - \sin^4 y > 0$, т.е.

$\sin^4 y - \cos^3 x < 0$ Получим противоречие с (**)

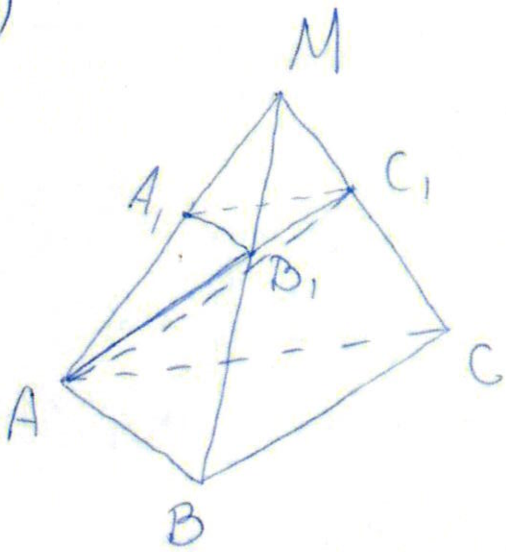
След. $|\sin x| = 1$ $\sin y = 0$, $\sin x = 1$ $\cos x = 0$ $\cos y = 1$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m \\ y = 2\pi l \end{cases}, m, l \in \mathbb{Z}$$

Ответ: 1) $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $y = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

2) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; $y = 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$

№3)



Дано:
MABC-пирамида
пл $(A_1B_1C_1) \parallel$ пл (ABC)
$V_{MABC} = 375$
$V_{MA_1B_1C_1} = 81$

Найти:
$V_{MAB_1C_1}$

13

Решение:

1) $\dfrac{V_{MABC}}{V_{MA_1B_1C_1}} = \dfrac{375}{81} = \dfrac{125}{27} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^3$; след., $\dfrac{BM}{B_1M} = \dfrac{5}{3}$

Пирамида MABC состоит из пирамиды MAB_1C_1 (осн. $\triangle MB_1C_1$, верш. в т. A) и пирамиды AB_1C_1CB (основание B_1C_1CB, верш. в т. A). У этих пирамид одна и та же высота, равная $\rho(A; BMC)$, след., их объёмы относятся как $S_{основ}$

$$\frac{V_{AB_1C_1CB}}{V_{MAB_1C_1}} = \frac{S_{B_1C_1CB}}{S_{MB_1C_1}}; \quad \frac{\overbrace{V_{AB_1C_1CB} + V_{MAB_1C_1}}^{=V_{MABC}}}{V_{MAB_1C_1}} = \frac{\overbrace{S_{B_1C_1CB} + S_{MB_1C_1}}^{=S_{MBC}}}{S_{MB_1C_1}}$$

$$\frac{375}{V_{MAB_1C_1}} = \frac{5^2}{3^2}$$

$$V_{MAB_1C_1} = \frac{375 \cdot 9}{25} = 135$$

Ответ: $V_{MAB_1C_1} = 135$

Шифр 78-11-15

Дополнительный лист

№5

Дано:

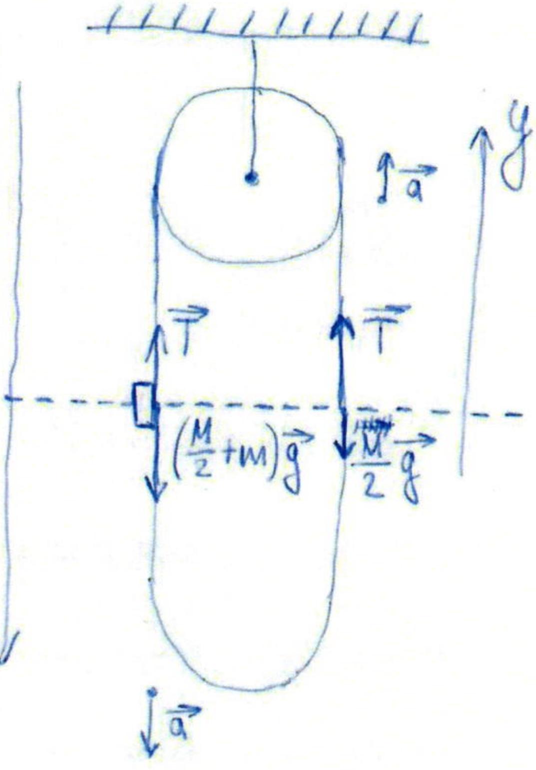
$M = 8$ кг

$m = 20$ кг

$h = const$

$t = 3$ с

$N - ?$



Решение:

$h = const$

1) II Н. для левой части верёвки $\left(\frac{M}{2}\right)$

$$\frac{M}{2}\vec{g} + m\vec{g} + \vec{T} = \frac{M}{2}\vec{a}$$

$$Oy: \frac{M}{2}g + mg - T = \frac{M}{2}a \ (1$$

2) II Н. для правой части

$$Oy_1: T - \frac{M}{2}g = \frac{M}{2}a \ (2)$$

3) $(1) + (2) \Leftrightarrow mg = Ma \qquad a = \frac{mg}{M} \ (3)$

4) Верёвка из состояния покоя приобретает скорость

$V = at \qquad V = \frac{mgt}{M} \ (4)$, след., для разгона верёвки обезьяна развивае мощност

5) N - мощность; $N = FV$

$h = const \Rightarrow F = mg \ (6)$

6) (4) и $(6) \rightarrow (5) \Leftrightarrow \frac{(mg)^2 t}{M} = \frac{(20 \cdot 10)^2 \cdot 3}{8} = 15000$ Вт $= 15$к

Ответ: $N = 15$ кВт

10

Шифр 78-11-15

Дополнительный лист

Решение:

№ 6

Дано:

$H = 3$ м

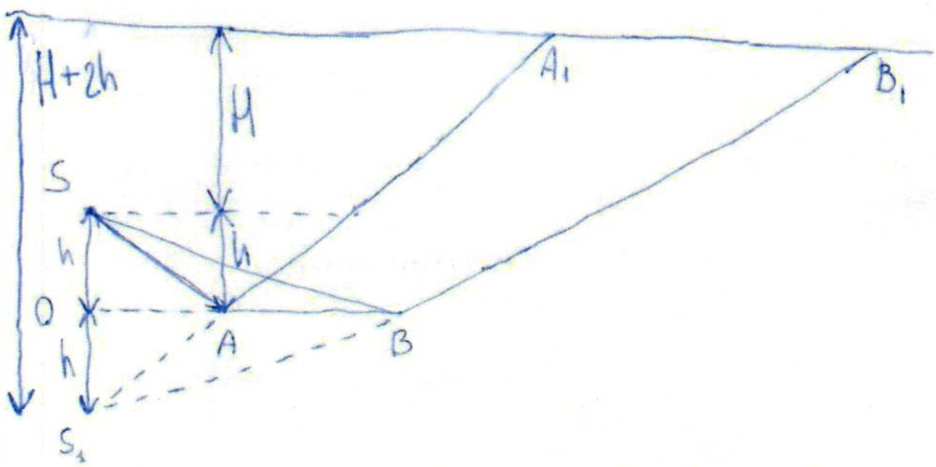
$h = 2$ м

$SA = 2h$

$V = 1{,}5$ м/с

$t = 4$ с

$\frac{A_2B_2}{A_1B_1}$ – ?



$SO = S_1O$ $\quad$ S_1 – мнимое изображение источника

$SS_1 \perp OA$

AA_1, BB_1 – отражённые лучи

$\triangle S_1A_1B_1 \sim \triangle S_1AB \Rightarrow \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{H+2h}{h} = \frac{3+4}{2} = 3{,}5$

A_1B_1 – это и есть размер "зайчика", он больше размера зеркала AB в 3,5 раза

Зеркало перемещается со скоростью 1,5 м/с вправо, при таком перемещении оба треугольника увеличиваются в размере в одинаковое число раз следовательно размер зайчика будет всё время больше размера зеркала в 3,5 раза, поэтому размер зайчика не изменится.

15

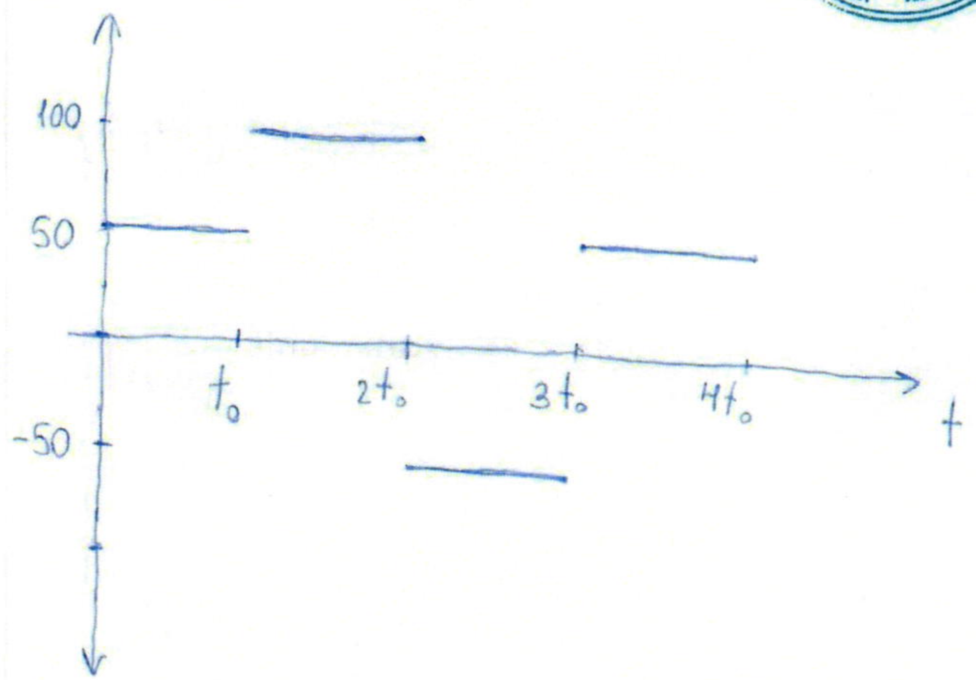
Ответ: размеры солнечного зайчика не изменятся

Шифр 78-11-15

Дополнительный лист

№ 7

Дано:



Найти:
$U_д$

Решение:

Действующее значение напряжения переменного тока – значение постоянного напряжения, которое выделяет такое же количество теплоты $Q = \frac{U^2}{R} \cdot t$

1) $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$

$Q = \frac{U_д^2}{R} \cdot 4t_0 = \frac{U_1^2}{R} \cdot t_0 + \frac{U_2^2}{R} \cdot t_0 + \frac{U_3^2}{R} \cdot t_0 + \frac{U_4^2}{R} \cdot t_0$

2) $U_д = \sqrt{\frac{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2}{4}} = \sqrt{\frac{50^2 + 100^2 + (-50)^2 + 50^2}{4}} = \frac{50}{2}\sqrt{7} = 25\sqrt{}$

$U_д = 25\sqrt{7} = 66,1 В$

Ответ: $U_д = \sqrt{\frac{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2}{4}} = 66,1 В$

10

Шифр 78-11-15

Дополнительный лист

№8

Дано:

$\nu = 4$ моль

$F_{тр} = 0$

$T_1 = 350K$

$V_2 = 2V_1$

$\alpha = \frac{60\%}{100\%} = 0{,}6$

$A - ?$

Решение:

1) Уравнение Менделеева для начального и конечного состояний.

$P_2 = P_1 = P$

$$\begin{cases} PV_1 = \nu_1 R T_1 & (1) \\ PV_2 = \nu_2 R T_2 & (2) \end{cases}$$, разделим $\frac{(2)}{(1)}$, получим

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\nu_2 T_2}{\nu_1 T_1} = 2 \quad (3)$$

$$T_2 = 2\frac{\nu_1 T_1}{\nu_2}$$

2) Т.к. 60% молекул диссоциировали на атомы, поэтому количество вещества увеличилось в 1,6 раз.

$\nu_2 = 1{,}6\nu_1 = 6{,}4$ моль $\Rightarrow$ подставим в (3), получим

$$T_2 = \frac{4 \cdot 350 \cdot 2}{6{,}4} = \frac{350}{0{,}8} = 437{,}5K$$

3) Работа газа в данном процессе:

$A = p\Delta V = \nu_2 R T_2 - \nu_1 R T_1 = (6{,}4 \cdot 8{,}31 \cdot 437{,}5) - (4 \cdot 8{,}31 \cdot 350) = 11634Дж$

Ответ: $A = 11634$ Дж.

15