Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 61/2-10-11

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	11	12	5	0	5	0	10	7	50

№1

Вариант 2.

Обозначим числа как a, $a+1$, $a+2$, $a+3$.
Рассмотрим все способы разбить числа на групп.

		разность
I) a и $a+1$. $a+2$ и $a+3$.	$a(a+1)=a^2+a$ $(a+2)(a+3)=a^2+5a+6$.	$4a+6$
II) a и $a+2$ $a+1$ и $a+3$	$a(a+2)=a^2+2a$ $(a+1)(a+3)=a^2+4a+3$	$2a+3$
III) a и $a+3$ $a+1$ и $a+2$	$a(a+3)=a^2+3a$ $(a+1)(a+2)=a^2+3a+2$.	2

Заметим, что т.к. $a \in N$, то $(4a+6) \vdots 2$.
~~2:2~~ Но $2021 \not\vdots 2$. Значит $2021 \neq 4a+6$ (I) и $2021 \neq 2$ (III). Остаётся вариант II:

$2a+3=2021$

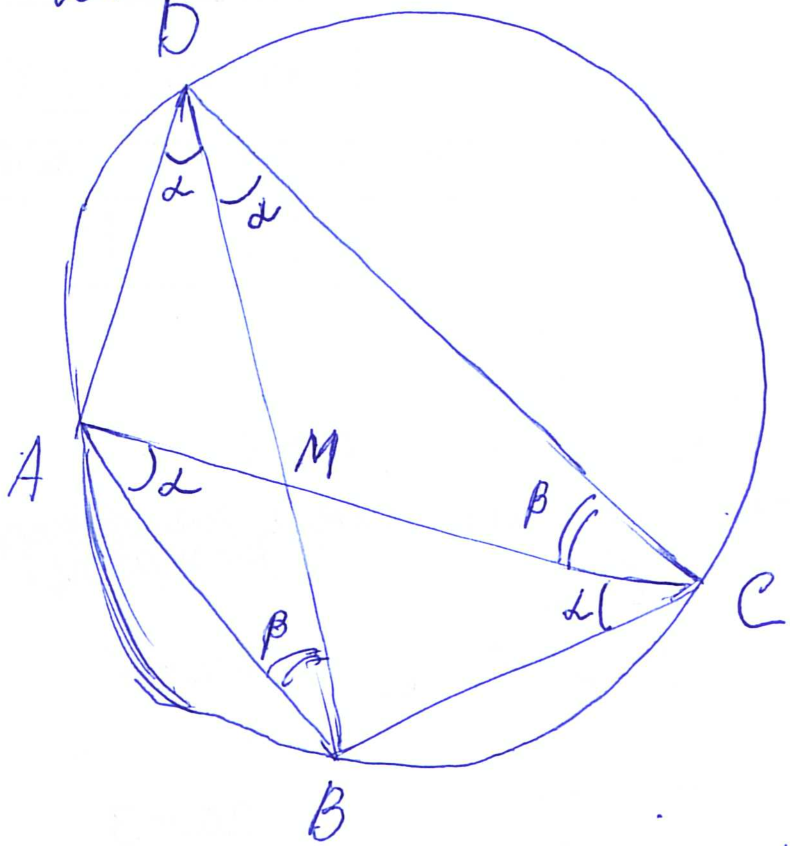
$a=1009$.

Ответ: 1009, 1010, 1011, 1012.

+

продолжение см на обор. ст.

N 2.



$\angle BCD = 45$

$AB = BC = 10$

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу равны (1)

Пусть $\angle ADB = \alpha$. $\Rightarrow \angle ACB = \alpha$ по св-ву вписанного угла (1).

По известной теореме, если хорды равны, то и стягиваемые ими дуги также равны (в одной окружности).

$AB = BC \Rightarrow \smile AB = \smile BC \Rightarrow \angle BDC = \angle ADB = \alpha$.
(по св-ву вписанных).

$\angle BAC = \angle BDC = \alpha$ (по св-ву впис.).

Пусть $\angle DCA = \beta$. $\Rightarrow \angle DBA = \angle DCA = \beta$ (по св-ву впис.)

$\angle AMB = 180 - (\alpha + \beta)$ из $\triangle AMB$ и суммы углов $\triangle$.

$\alpha + \beta = \angle BCA + \angle ACD = \angle BCD = 45°$,

$\angle AMB = 180 - 45 = 135°$.

Рассмотрим отдельно $\triangle AMB$. O-цент описанной окружности лежит вне треугольника, т.к. $\angle AMB > 90°$.

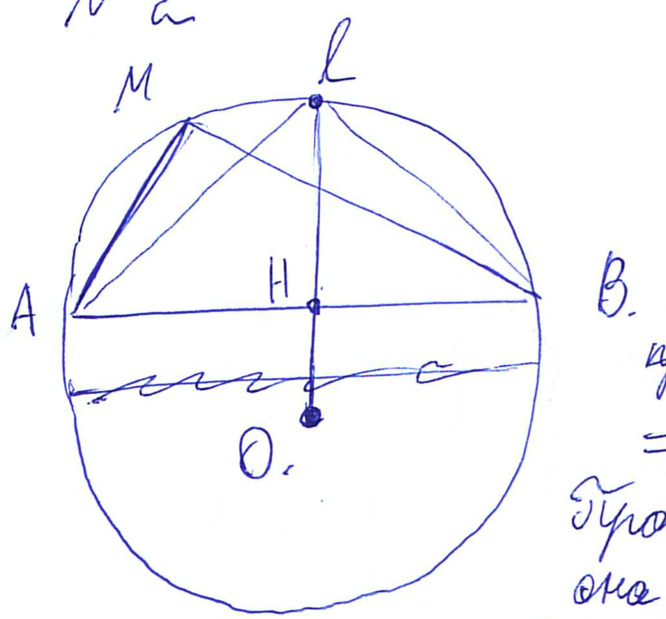
Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 61/2-10-11

Задание	1	2	3	4	5	6	7	Всего
Баллы								

Вариант 2

N 2



Отметим L - середину дуги AMB.

$\angle ALB = \angle AMB = 135^\circ$.

по св-ву впис.

~~про~~ $\smile AL = \smile BL \Rightarrow AL = BL \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ALB$ - равнобедр.

Проведём его высоту LH.

она также будет биссектрисой и медианой. Высота и медиана одновременно, это серединный перпендикуляр.

Центр опис. окр $\triangle AMB$ совпадает с центром опис окр $\triangle ALB$ и лежит на серединном перпендикуляре к AB. т.е. $O \in LH$. $\angle HLB = \frac{1}{2}\angle ALB = \frac{135}{2}$ по ~~св-ву~~ определению биссектрисы.

$OL = OB$ (как радиусы) $\Rightarrow \triangle LOB$ - равнобедр

$\Rightarrow \angle OBL = \angle OLB = \frac{135}{2}$. В $\triangle OLB$:

$\angle LOB = 180^\circ - \angle OBL - \angle OLB = 180^\circ - \frac{135}{2} - \frac{135}{2} = 45$.

Рассмотрим $\triangle OHB$. $HB = \frac{1}{2} AB$ по определению медианы. $HB = \frac{10}{2} = 5$.

$\angle OHB = 90$, т.к. $LH \perp AB$ по определению высоты.

$\angle HBO = 180° - \angle OHB - \angle HOB = 180° - 90° - 45° = 45°$.

$\angle HBO = 45°$, $\angle HOB = 45°$. Значит $\triangle OHB$ - равнобедренный

$\Rightarrow OH = HB$. $OH = HB = 5$.

т. $\angle OHB = 90°$, по т. Пифагора

$OB = \sqrt{OH^2 + HB^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$.

Ответ: $5\sqrt{2}$. +

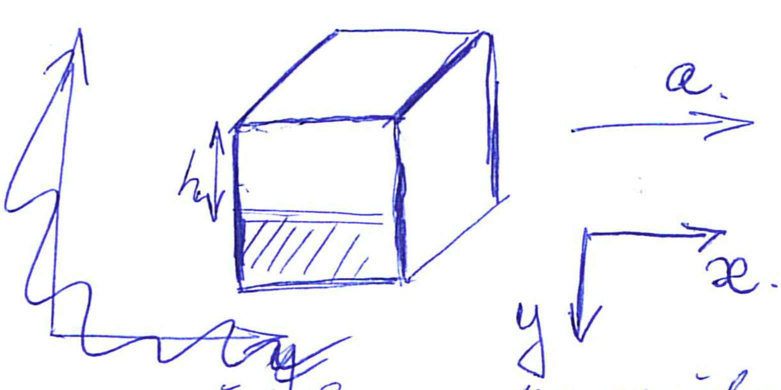
№5.

$a = 15$ м/с

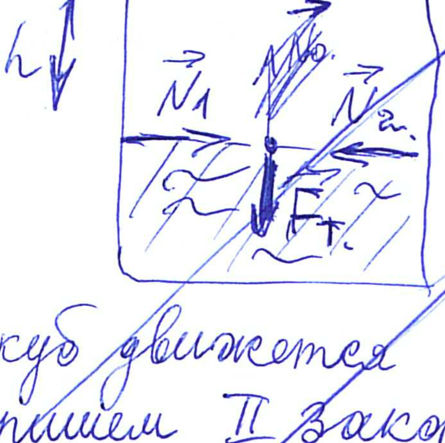
$P_{max} = 10^4$ Па

$l = 20$ см $= 0.2$ м.

$g = 10$ м/с^2



Рассмотрим силы, действующие на слой воды на ~~высоте h~~ расстоянии h от верхней грани куба. Введём СО. Со стороны стенок куба действуют силы $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$, и сила $\vec{F}_T$ со стороны верхних слоёв воды. ~~N_0 со стороны дна~~.



Будем считать, что если куб движется с уск. $\vec{a}$, то и вода в нём также. Запишем II закон Ньютона в проекции на ось x: $m\vec{a} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2$.

продолжение на стр 9.

шифр 61/2-10-11

Задание	1	2	3	4	5	6	7	Всего
Баллы								

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Вариант 2

№ 3.

Воспользуемся фактом, что нечётное число нельзя разделить на чётное нацело. (*)

Воспользуемся сравнением по модулю 2.

Предположим $n \overset{2}{\equiv} 0$.

Значит. $(n^3 - pn + 13) \overset{2}{\equiv} 0^3 - p\cdot 0 + 13 \overset{2}{\equiv} 1$.

$(n^2 + pn + 2) \overset{2}{\equiv} 0^2 + p\cdot 0 + 2 \overset{2}{\equiv} 0$.

Т.е. $(n^3 - pn + 13) \not\vdots\, 2$, а $(n^2 + pn + 2) \,\vdots\, 2$,

но такого быть не может, по утв (*).

Значит предположение $n \overset{2}{\equiv} 0$ - неверно.

Значит $n \overset{2}{\equiv} 1$.

Тогда

$(n^3 - pn + 13) \overset{2}{\equiv} 1^3 - p + 13 \overset{2}{\equiv} -p \overset{2}{\equiv} p$

$n^2 + pn + 2 \overset{2}{\equiv} 1^2 + p + 2 \overset{2}{\equiv} p + 1$.

Предположим $p \not\vdots\, 2$. тогда. $p \overset{2}{\equiv} 1$. Значит

$(n^3 - pn + 13) \overset{2}{\equiv} 1 \Rightarrow (n^3 - pn + 13) \not\vdots\, 2$.

$(n^2 + pn + 2) \overset{2}{\equiv} 0 \Rightarrow (n^2 + pn + 2) \,\vdots\, 2$.

противоречие с утверждением (*).

Значит наше предположение $p \not\vdots\, 2$ было неверно. Значит $p \,\vdots\, 2$.

Единственное простое, которое делится на 2, это 2. Значит $p = 2$.

$$\frac{n^3-2n+13}{n^2+2n+2}.$$ ~~Воспользуемся алгоритмом Евклида.~~

~~Если a:~~ Разделим выражения

$$\begin{array}{r|l} n^3-2n+13 & n^2+2n+2 \\ -\ n^3+2n^2+2n & n-2 \\ \hline -2n^2-4n+13 & \\ -\ -2n^2-4n-4 & \\ \hline 17 & \end{array}$$

Значит по определению остатка

$((n^3-2n+13)-17) \vdots\, n^2+2n+2$.

по условию $(n^3-2n+13) \vdots\, (n^2+2n+2)$.

Т.е. 1) $n^3-2n+13-17 \equiv 0 \pmod{n^2+2n+2}$

$(n^3-2n+13) \equiv 0 \pmod{n^2+2n+2}$

Подставим значение $n^3-2n+13$ в 1.

$0 - 17 \equiv 0 \pmod{n^2+2n+2}$.

$17 \equiv 0 \pmod{n^2+2n+2}$.

Т.е. $17 \vdots\, (n^2+2n+2)$.

т.к. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^2+2n+2 \geq 5$. (т.к. $n \geq 1$).

Значит $n^2+2n+2 = 17$. Решим квадратное ур-е

$n^2+2n-15=0$. по т. Виета:

$n_1 = 3$

$n_2 = -5$ не удовлетворяет усл $n \in \mathbb{N}$.

Ответ: $n = 3$, $p = 2$.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 61/2-10-11

Задание	1	2	3	4	5	6	7	Всего
Баллы								

Вариант ______

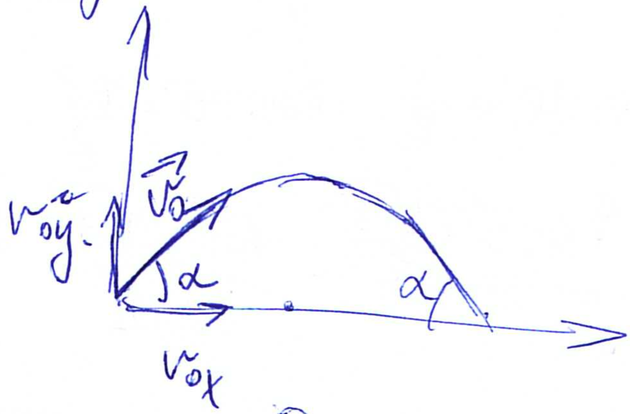
№ 6.

$v_0 = 15$ м/с

$\alpha = 30°$.

$g = 10$ м/с^2.

Введём СО



t - время.

v_{0x}, v_{0y} - проекции.

$$v_{x(t)} = v_0 \cos\alpha$$
$$v_{y(t)} = v_0 \cdot \sin\alpha - gt.$$

1) $x(t) = t \cdot v_0 \cdot \cos\alpha$.

2) $y(t) = t v_0 \sin\alpha - g\frac{t^2}{2}$.

найдём $t_{пол}$: при $y=0$. из 2: $t_{пол} = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}$.

~~Найдем~~ (т.к. в конечный момент удара $y=0$)

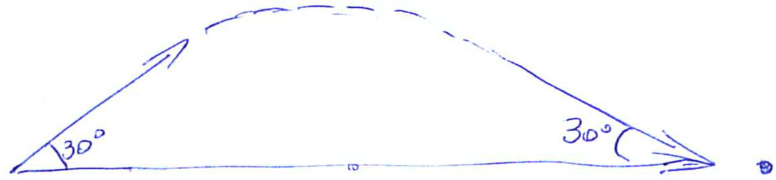
Найдем

$$v_y\left(\frac{2v_0\sin\alpha}{g}\right) = v_0\sin\alpha - g\cdot\frac{2v_0\sin\alpha}{g} = -v_0\sin\alpha.$$

конечная v_y равна начальной по модулю и противоположна по знаку.

т.к. $v_x = const$,

$\vec{v} = \vec{v_x} + \vec{v_y}$, то угол вектора скорости при ударе об землю также равен α.



~~Если считать, что це.~~ Будем считать точку удара о землю точкой касания траектории и окружности. Точку старта аналогично. Рассчитаем x конечное, подставив $t_{пол}$ в $x(t)$.

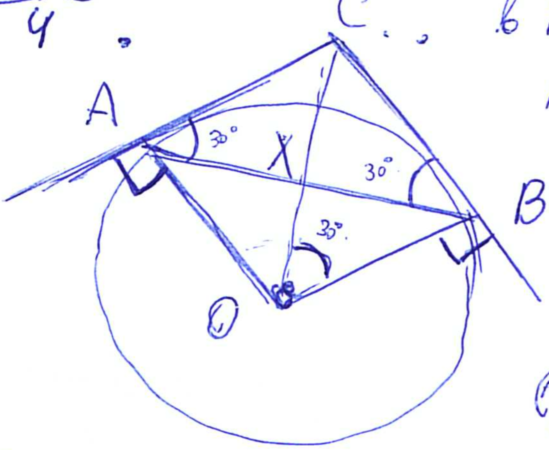
$$l = x(t) = V_0 \cos\alpha \cdot \frac{2V_0 \sin\alpha}{g} = \frac{2V_0^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g}.$$

$\sin 30° = \frac{1}{2}$. $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

~~$l = 2V$~~

$$l = \frac{\cancel{2} \cdot 15^2 \cdot \cancel{0.5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{10} = \frac{15^2 \cdot \sqrt{3}}{10 \cdot 2} = \frac{22.5\sqrt{3}}{2} = 11.25\sqrt{3} =$$

$$= \frac{45\sqrt{3}}{4}.$$



В точках касания A и B радиусы OA и OB перпендикулярны AC и BC соответственно.

~~$\angle ACB = 180° - \angle ACB$~~

~~$= 180° - \angle ABC - \angle CAB = 120°$.~~

~~(в $\triangle ABC$ сумма углов 180).~~

$\angle CAO = 90°$, $\angle CBO = 90° \Rightarrow \angle CAO + \angle CBO = 180°$

$\Rightarrow ACBO$ – вписанный четырехугольник.

$\angle COB = \angle CAB = 30°$ (по св-ву впис. углов.

т.к. ACB – равнобедр. $OC \perp AB$. (по док-му в задаче 2)

$X = AB \cap OC$. $AX = BX$. (по док-му в задаче 2).

Рассмотрим $\triangle OBX$.

$$BX = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{45\sqrt{3}}{4}.$$

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 61/2-10-11

Задание	1	2	3	4	5	6	7	Всего
Баллы								

Вариант 2.

т.к. ΔOBX – прямоуг.

$\sin 30^\circ = \frac{BX}{OB}$ (по определению синуса).

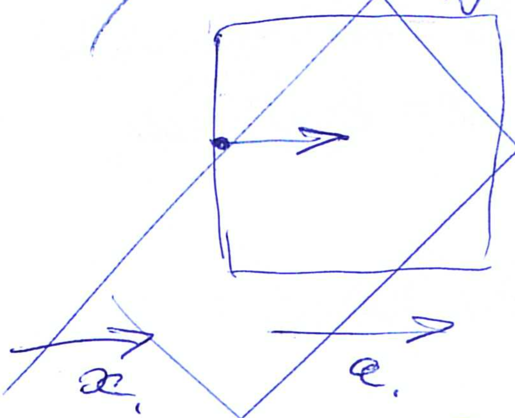
$BX = OB \sin 30$.

$OB = \frac{BX}{\sin 30^\circ} = \frac{45\sqrt{3}}{8} : \frac{1}{2} = \frac{45\sqrt{3}\cdot \cancel{2}}{\cancel{8}_4} = \frac{45\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: радиус кривизны равен $\frac{45\sqrt{3}}{4}$ м или $11.25\sqrt{3}$ м.

N5.

продолжение. рассчитаем силу, с которой стенка сосуда действует на воду



действие правой стенки пренебрежимо мало. при расчёте ~~давления~~ силы от левой стенки.

по II закону Ньютона. в проекции на x.

$F = ma$.

$m = V\cdot\rho = l^3\cdot\rho. \Rightarrow F = l^3\rho a.$

посчитаем p_1, площадь левой стенки l^2:

$p_1 = \frac{F}{S} = \frac{l^3\rho a}{l^2} = l\rho a.$

давление столба жидкости на глубине $h = \rho g h$.

$p_2 = \rho g h$.

По закону Паскаля давление ~~раз~~ в жидкостях и газах передаётся равномерно во всех направлениях.

т.е. $p_0 = p_1 + p_2$ ~~$= l\rho a + \rho g h$~~.

~~p_{0max} при h_{max}~~. $h_{max} = l$.

~~$p_{0max} = l\rho a + \rho g l = \rho l (a+g)$~~

p_1 не зависит от высоты столба жидкости.

т.е $p_1 = const$., $p_2 = \rho g h$ - зависит от h.

~~$p_1 = l$~~ $p_{0max} = p_1 + p_{2max} = p_1 + \rho g l$.

(т.к $h_{max} = l$). $p_1 = p_{0max} - \rho g l$.

$p_{0min} = p_1 + p_2$, при p_{2min}. p_{2min} при $h = 0$. тогда

$p_{0min} = p_1 = p_{0max} - \rho g l = 10000 - 1000 \cdot 10 \cdot 0.2 =$

$1 г/см^3 = 1000 кг/м^3$ $= 10^4 \cdot 0.8 = 8000$ Па.

$l = 20 см = 0.2 м$.

Ответ: $p_{min} = 8000$ Па или 8 кПа.

№ 7.

$V = 2 л$.

$\Delta \tau = 1 мин = 60 с$

$\Delta t = 5 К$.

$P = 1 кВт = 1000 Вт$.

$c = 4200 \frac{Дж}{кг \cdot К}$.

$\rho = 1 г/см^3 = 1000 кг/м^3$.

здесь и далее t - температура, τ - время

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 61/2-10-11

Задание	1	2	3	4	5	6	7	Всего
Баллы								

Вариант 2

Будем считать теплоотдачу в окружающую среду за равные промежутки времени постоянной. Посчитаем $P_{возд.}$ (теплоотдачу в секунду).

$$P_{возд} = \frac{Q}{\tau} = \frac{cm\Delta t}{\tau}.$$

$P_{ч.} = 1000\ Вт = 1000\ \frac{Дж}{с}$ (теплополучение в секунду).

Тогда результирующая теплополучения в секунду

$$P_0 = P_ч - P_{возд}.$$

Т.к. с и m – const, то довести его до первоначального состояния $\Leftrightarrow$ восполнить потерянное тепло.

$Q_{потерянное} = cm\Delta t.$

время τ_x, за которое его можно восполнить

$$\tau_x = \frac{Q_{потерянное}}{P_0} = \frac{cm\Delta t}{P_ч - P_{возд.}} = \frac{cm\Delta t}{P_ч - \frac{cm\Delta t}{\tau}} =$$

$m = \rho V = \cancel{1000 \cdot 0{,}2 \cdot 10}\ 1000 \cdot 0{,}002 = 2\ кг$

$$\tau_x = \frac{4200 \cdot 2 \cdot 5}{1000 - \frac{4200 \cdot 2 \cdot 5}{60}} = \frac{42 \cdot 10^3}{300} = 140\ с.$$ +

Ответ: 140 с или 2 минуты 20 с.

№8.

проанализируем, как работает омметр: подаёт собственный ток, измеряет итоговую силу тока и напряжение и находит результат по з. Ома

$I = \frac{U}{R} \Rightarrow R = \frac{U}{I_a}$

От перемены полярности собственное сопротивление омметра, как и напряжение останутся неизменными. Пусть i — ток омметра, I — батарейки.

$R_1 = 8$ Ом. $U = const.$ $R = \frac{U}{I_1}$

$R_2 = 16$ Ом.

$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{U}{R_1} \\ I_2 &= \frac{U}{R_2} \end{aligned}\right\}$ т.к. $R_1 < R_2$, то $I_1 > I_2$. тогда

$I_1 = I + i$

$I_2 = I - i.$

$\left.\begin{aligned} U &= I_1 R_1 \\ U &= I_2 R_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow I_1 R_1 = I_2 R_2.$

$\Rightarrow 8I_1 = 16I_2.$

$I_1 = 2I_2,$

$+ \left.\begin{aligned} 2I_2 &= I + i \\ I_2 &= I - i \end{aligned}\right\}$ $\quad R_0 = \frac{U}{I}.$

$\Downarrow$

$3I_2 = 2I \Rightarrow I = \frac{3}{2} I_2.$

$R_0 = U : \frac{3I_2}{2}$

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 61/2-10-11

Задание	1	2	3	4	5	6	7	Всего
Баллы								

Вариант ______

$$R_0 = \frac{U \cdot 2}{3I_2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{U}{I_2} = \frac{2}{3} \cdot R_2 = \frac{2}{3} \cdot 16 = \frac{32}{3} \text{ Ом.}$$

Ответ: $\frac{32}{3}$ Ом. или 10,(6) Ом.