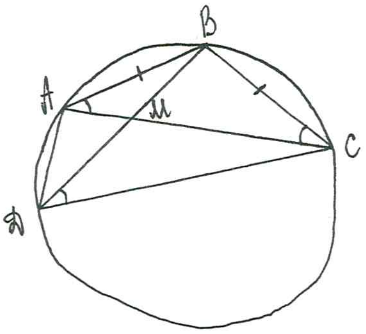
Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр ЕИ-55-10-17

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	11	12	13	14		8			50

Вариант 1



Дано:
ABCД - вписанный четырёхугольник
$AB = BC = 5$
$\angle BCД = 30^\circ$
AC, $BД$ - диагонали $ABCД$
$AC \cap BД = M$
Найти: r, где r - радиус окружности, проходящей через точки A, B и M.

Решение

Пусть $\angle BДC = \alpha$. $\angle BДC$ - вписанный $\Rightarrow$ $\smile BC = 2\alpha$.
$\angle BAC$ - вписанный $\Rightarrow$ $\angle BAC = \frac{1}{2} \cdot \smile BC = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha = \alpha$.
Рассмотрим $\triangle ABC$:
Так как $AB = BC$ (по условию), то $\triangle ABC$ - равнобедренный. Значит, $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$ (по свойству).
Рассмотрим $\triangle ДMC$:
$\angle ACB + \angle ДCM = \angle BCД$.
$\angle ДCM = \angle BCД - \angle ACB = 30^\circ - \alpha$.
$\angle ДCM + \angle MДC + \angle ДMC = 180^\circ$
$\angle ДMC = 180^\circ - \angle ДCM - \angle MДC = 180^\circ - (30^\circ - \alpha) - \alpha = 180^\circ - 30^\circ + \alpha - \alpha = 150^\circ$.
Рассмотрим $\triangle ABM$:
$\angle AMB = \angle ДMC = 150^\circ$ (как вертикальные)
$\triangle ABM$ - вписанный (по условию). По следствию из теоремы синусов:

$$\frac{AB}{\sin\angle AMB} = 2r$$

$$r = \frac{AB}{2 \cdot \sin\angle AMB}$$

$$r = \frac{5}{2 \cdot \sin 150^\circ} = \frac{5}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{5}{1} = 5$$

12б

Ответ: $r = 5$.

№ 3.

Дано:

p - простое число

n - целое число

$\frac{n^3-pn+1}{n^2+pn+2}$ - целое число

Найти:

p, n

Решение:

Пусть n - чётное число. Тогда числитель дроби $\frac{n^3-pn+1}{n^2+pn+2}$ - нечётное число, а знаменатель - чётное. Нечётное число не может разделиться на чётное нацело. Так как $\frac{n^3-pn+1}{n^2+pn+2}$ - целое число, то это невозможно. Следовательно, n - нечётное число.

Пусть p - нечётное.

n - нечётное $\Rightarrow n^3$ - нечётное

p - нечётное, n - нечётное $\Rightarrow pn$ - нечётное

1 - нечётное

Значит, числитель (n^3-pn+1) - нечётное число

Если степень некоторого числа a чётная, то и само число a чётное.

n - нечётное $\Rightarrow n^2$ - нечётное

2 - чётное

Значит, знаменатель (n^2+pn+2) - чётное число.

Отношение нечётного числа к чётному не может ~~б~~ выражаться целым числом.

Таким образом, p - чётное число.

Среди простых чисел только одно число 2 является чётным. $p=2$

Если $p=2$, то $\frac{n^3-pn+1}{n^2+pn+2}=\frac{n^3-2n+1}{n^2+2n+2}=n-2+\frac{5}{n^2+2n+2}=n-2+\frac{5}{(n^2+2n+1)+1}=n-2+\frac{5}{(n+1)^2+1}$

$$\begin{array}{l|l} n^3-2n+1 & n^2+pn+2 \\ \hline n^3+2n^2+2n & n-2+\frac{5}{n^2+pn+2} \\ -2n^2-4n+1 & \\ -2n^2-4n-4 & \\ \hline \quad 5 & \\ \quad 5 & \\ \hline \quad 0 & \end{array}$$

1) $(n+1)^2+1=5$,

$(n+1)=\pm\sqrt{4}$,

$(n+1)=\pm 2$,

$\left[\begin{array}{l}(n+1)=2,\\(n+1)=-2;\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}n=1,\\n=-3.\end{array}\right.$

2) $(n+1)^2+1=1$,

$(n+1)^2=0$,

$n=-1$.

Ответ: 1) $p=2$; $n=1$; 2) $p=2$; $n=-3$; 3) $p=2$; $n=-1$.

135

№ 1.

n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ – четыре последовательных натуральных числа.
Пусть n и $n+1$ принадлежат первой группе. Тогда $n+2$ и $n+3$ относятся ко второй группе.
Так как числа первой группы меньше чисел второй группы, то произведение чисел первой группы меньше, чем произведение второй. По условию, разница между ними равна 2022. Составим и решим уравнение:

$n(n+1)+2022=(n+2)(n+3)$,

$n^2+n+2022=n^2+3n+2n+6$,

$-2n+2016+(-2n)=0$,

$-4n=-2016$,

$n=504$.

Значит, $n+1=504+1=505$, $n+2=504+2=506$, $n+3=504+3=507$.

Ответ: 504, 505, 506, 507.

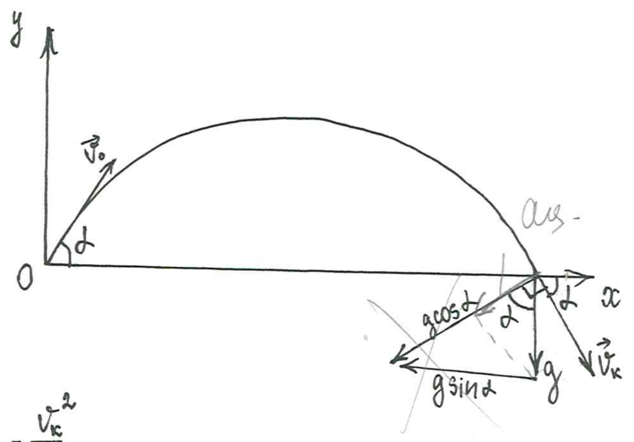
11б

№ 6.

Дано:
$\alpha=60°$
$v_0=10\,\frac{м}{с}$
$g=10\,\frac{м}{с^2}$

R – ?

Решение:



–1б

$a_н=\frac{v_к^2}{R}$

$R=\frac{v_к^2}{a_н}$

$|v_к|=|v_0|$ cos! –1б $a_н=g\cos 60°$

$a_н=g\sin\alpha$

$R=\frac{v_0^2}{g\sin\alpha}$

$R=\frac{100\,\frac{м^2}{с^2}}{10\,\frac{м}{с^2}\cdot\sin 60°}=10\,м\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\approx 11{,}55\,м$

Ответ: $R=11{,}55$ м

8б

№ 4.

Доказать:

число $(8+\sqrt{65})^{2022}$ содержит по меньшей мере 2426 девяток после запятой подряд.

Доказательство:

Пусть $(8+\sqrt{65})^{2022} = (a+b\sqrt{65})^{2022}$; $(8-\sqrt{65})^{2022} = (a-b\sqrt{65})^{2022}$.

ыполним сложение:

$$(8+\sqrt{65})^{2022} + (8-\sqrt{65})^{2022} = a+b\sqrt{65}+a-b\sqrt{65} = 2a$$

тсюда, $(8+\sqrt{65})^{2022} = 2a-(8-\sqrt{65})^{2022}$, причём $2a$ - целое число.

делаем оценку:

$$(8-\sqrt{65})^{2022} = \frac{(8-\sqrt{65})^{2022}\cdot(8+\sqrt{65})^{2022}}{(8+\sqrt{65})^{2022}} = \frac{(64-65)^{2022}}{(8+\sqrt{65})^{2022}} = \frac{(-1)^{2022}}{(8+\sqrt{65})^{2022}} = \frac{1^{2022}}{(8+\sqrt{65})^{2022}}$$

$$\frac{1^{2022}}{(8+\sqrt{65})^{2022}} < \frac{1}{10^{2426}}$$

начит, $2a - 0,\dots 1 = N,\underbrace{999\dots9}_{2496}$ N - целая часть

Что и требовалось доказать

14б