Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 73-09-24

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	6	12	13	14	8	15	5	10	83

Вариант 1

№1

Пусть нам удалось вычеркнуть несколько множителей, чтобы удовлетворить условию. Тогда произведение теперь стало иметь вид $10K+1$, где K – целое. Тогда, оно взаимно просто с 10 (т.к. $НОД(10K+1, 10) = НОД(1; 10) = 1$). Тогда, мы должны были вычеркнуть все множители, кратные 2 и кратные 5. По формуле включений исключений таких чисел от 1 до 2022 будет: $\left\lfloor\frac{2022}{2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2022}{5}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{2022}{10}\right\rfloor$ (складываем числа $\vdots 2$, $\vdots 5$, числа $\vdots 10$ посчитали 2 раза, вычитаем), что равно $1011+404-202=1213$.

Тогда, среди оставшихся множителей остались только сравнимые с 1, 3, 7, 9 по модулю 10; каждых из них соответственно $\left\lfloor\frac{2022-1}{10}\right\rfloor$; $\left\lfloor\frac{2022-3}{10}\right\rfloor$; $\left\lfloor\frac{2022-7}{10}\right\rfloor$; $\left\lfloor\frac{2022-9}{10}\right\rfloor$. Тогда, по модулю 10 произведение сравнимо с:

$$1^{\left\lfloor\frac{2022-1}{10}\right\rfloor} \cdot 3^{\left\lfloor\frac{2022-3}{10}\right\rfloor} \cdot 7^{\left\lfloor\frac{2022-7}{10}\right\rfloor} \cdot 9^{\left\lfloor\frac{2022-9}{10}\right\rfloor} = 1\cdot(3\cdot7\cdot9)^{201} \equiv$$

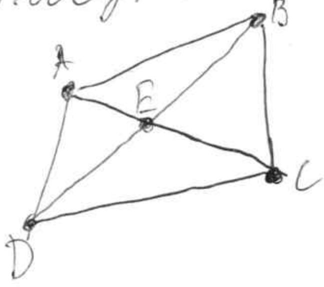
$$\equiv 1\cdot 9^{201} \pmod{10} \equiv 1\cdot(-1)^{201} \pmod{10} \equiv -1 \pmod{10}$$

Тогда, нам необходимо вычеркнуть ещё хотя бы ~~...~~ одно число. Вычеркнув ещё число 9, получим, что произведение сравнимо с $\frac{-1}{9}$ по модулю 10, т.е. с 1, что и требовалось. Итого, необходимо зачеркнуть хотя бы $1213+1=1214$ чисел.

Ответ: 1214.

№ 2

Рисунок:



В силу выпуклости $ABCD$ верно, что:

$S_{ABCD} = S_{AED} + S_{AEB} + S_{BEC} + S_{CED} = S_{ABD} + S_{DBC}$.

Заметим, что: $S_{DBC} = BD \cdot EC \cdot \sin\angle BEC$

$S_{ADB} = BD \cdot AE \cdot \sin\angle AED$.

т.к. $\angle AED = \angle BEC$, то:

$\frac{S_{DBC}}{S_{ABD}} = \frac{EC}{AE}$; $S_{DBC} = \frac{EC}{AE} \cdot S_{ABD}$; $S_{DBC} + S_{ABD} = \frac{AE+EC}{AE} \cdot S_{ABD} = \frac{AC}{AE} S_{ABD}$

Заметим также, что:

$S_{ADE} = \frac{1}{2} AD \cdot AE \cdot \sin\angle DAE$; $S_{ADC} = \frac{1}{2} AD \cdot AC \cdot \sin\angle DAE$;

Значит: $\frac{S_{ADE}}{S_{ADC}} = \frac{AE}{AC}$; $\frac{AC}{AE} = \frac{S_{ADC}}{S_{ADE}}$. Имеем, что:

$S_{ABCD} = S_{DBC} + S_{ABD} = \frac{AC}{AE} \cdot S_{ABD} = \frac{S_{ADC} \cdot S_{ABD}}{S_{ADE}} = \frac{9 \cdot 10}{6} = 15$ (см²)

Ответ: 15 см²

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 73-09-24

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

№3

Пусть такой существует. Тогда имеем, что у трёхчлена x^2+px+q корни: x_1 и x_2 (возможно, что $x_1=x_2$) – целые. Тогда, по т. Виета:

$q = x_1x_2$; $p=-x_1-x_2$; значит q, p – целые.

Тогда, т.к. корни трёхчлена $x^2+(p+n)n+q+n$ выражаются через формулу $x_{1,2} = \frac{-p-n\pm\sqrt{(p+n)^2-4q-4n}}{2}$ (через дискриминант); и это число при всех $1\le n\le 2022$ целое, и также, т.к. p, n – целые, то число $\sqrt{(p+n)^2-4q-4n}$ – также целое. Тогда имеем, что $(p+n)^2-4q-4n$ – квадрат, для всех $1\le n\le 2022$.

~~Но тогда, существует 2021 пара чисел, пары которых отличаются ровно на 4 (т.к. это те при $n=i$ и $n=i+1$ для всех $1\le i\le 2021$)~~ (всё, что было написано выше, можно забыть).

Р-м. трёхчлен x^2+x. ($p=1$, $q=0$). Тогда, все рассматриваемые трёхчлены имеют вид $x^2+(n+1)x+n$. Утверждается, что по т. Виета их корнями будут числа $-n$ и -1 соотв., т.к. $-(-n)+-(-1)=n+1$, $(-n)(-1)=n$. т.к. n – целое, то корни целые. Ответ: да, это x^2+x.

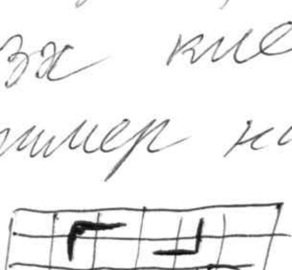
№4

Разобьём доску на квадраты 2×2 (непересекающиеся) рисунок:

Тогда, в любом удовлетворяющем условию разрезании в каждом из квадратов уголками покрыто ≥ 2 клетки, иначе мы могли бы вырезать в этом квадрате уголок.

тогда, если уголков x, то отмечено $3x$ клеток, и $3x \geq 2\cdot\frac{6\cdot 8}{4}$; $x \geq 8$.

Пример на 8:



если бы можно было бы вырезать уголок, то существовал бы квадрат 2×2 (необязательно из отмеченных ранее), где было бы отмечено ≤ 1 клетки.

в примере: в любом из 35 квадратов 2×2 ≥ 2 клетки.

Ответ: 8.

№7

(т.к. чисто теоретически сила трения может быть направлена вниз для некоторой силы F мы допускаем, что её значение может быть отрицательным)

система находится в равновесии, а значит выполняются I и II усл-я для равновесия всех частей системы

По I-му усл. дин. р-в (для спуска) (проекц. на OY):

(+1б.)

$\sum \vec F = 0$; $\sum F_y = 0$; $F_{тр} + F\cdot\cos(\alpha) - mg = 0$

(проекц. на OX): (+1б.)

$\sum F_x = 0$; $F\cdot\sin(\alpha) - N = 0$

Т.к. $F_{тр} \leq \mu N = \mu\cdot F\cdot\sin(\alpha)$, то: $F(\mu\sin(\alpha) + \cos(\alpha)) \geq mg$; [illegible]

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 73-09-24

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

№7 (продолжение)

Т.к. $F_{тр} \le \mu N = \mu F \cdot \sin(\alpha)$ (из второго тождества), то (+) $mg = F_{тр} + F\cos(\alpha) \le F(\mu \sin(\alpha) + \cos(\alpha))$,

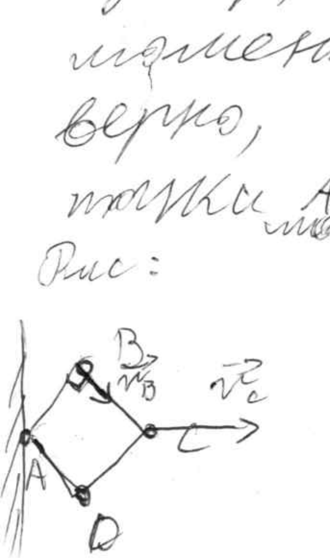
$$F \geq \frac{mg}{\mu \sin(\alpha) + \cos(\alpha)} = \frac{10\ Н}{0{,}1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{200}{\sqrt{3}+10}\ Н = \frac{2000 - 200\sqrt{3}}{97}\ Н.$$

Ответ: $\frac{200}{\sqrt{3}+10}$ Н ($\frac{2000-200\sqrt{3}}{97}$ Н).

№6.

Заметим, что точка B движется по окр-ти с центром в A и радиусом AB. Тогда, скорость точки B перпендикулярна радиусу (AB) в каждый момент времени. (всё вышесказанное верно, т.к. стержни нерастяжимы и точка A неподвижна) В рассматриваемый момент времени $\vec{v}_B \parallel BC$, т.к. $\angle ABC = 90°$. Найдём проекцию $\vec{v}_B$ на ось ox, параллельную AC:

Рис:



Т.к. ~~AB = BC~~ смещение точки C отн. A равно сумме смещения проекции B на AC отн. A и смещения C отн. проекции B. Т.к. AB = BC, то проекция B на AC — середина AC и значит, последние два смещения равны, и равны половине смещения C отн A,

~~Значит v_B ...~~

№6 (продолжение).

Значит $v_{B_x} = \frac{1}{2} v_c$.

Т.к. вектор $\vec{v}_B$ образует с осью Ox ~~вектор~~ угол 45° ($\frac{1}{2}(180°-90°)$), то $v_B = v_{B_x} \cdot \frac{1}{\cos(45°)} = \sqrt{2}\, v_{B_x} = \frac{\sqrt{2}}{2} v_c =$

$= \frac{5\sqrt{2}}{2}$ см/с.

(+) 15б.

Ответ: $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ см/с.

№8.

Обозначим за U_1 установившееся падение напряжения на участке с лампой. Тогда, т.к. $I = K\sqrt{U_1}$, ~~то~~ (K находится по графику и равен $\frac{2}{\sqrt{10}} \frac{A}{B}$), то суммарное падение напряжения равно

(+) 2б.

$R \cdot I + U_1 = RK\sqrt{U_1} + U_1 = U$;

$\sqrt{U_1}_{1,2} = \frac{-RK \pm \sqrt{R^2K^2 + 4U}}{2}$; т.к. $-RK < 0$, то $\frac{-RK - \sqrt{R^2K^2+4U}}{2} < 0$, но $\sqrt{U_1} > 0$, так что

$\sqrt{U_1} = \frac{\sqrt{R^2K^2+4U} - RK}{2}$; $U_1 = \left(\frac{\sqrt{R^2K^2+4U} - RK}{2}\right)^2$.

(+3б)

При этом $P_л = U_1 \cdot I = U_1 \cdot K\sqrt{U_1} =$

$= K \cdot (\sqrt{U_1})^3 = \frac{2}{\sqrt{10}} \cdot \left(\frac{\sqrt{100 \cdot \frac{2}{5} + 120} - 2\sqrt{10}}{2}\right)^3 =$

$= \frac{2}{\sqrt{10}} \cdot \left(\frac{4\sqrt{10} - 2\sqrt{10}}{2}\right)^3 = \frac{2}{\sqrt{10}} \cdot (\sqrt{10})^3 = 2 \cdot 10 = 20$ (Вт.)

(+5б)

Ответ: 20 Вт.

Σ 10.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 73-09-24

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

№5

Важно заметить, что все изображения будут мнимыми, и будут лежать во внешней области угла $\angle AOB$.

Разобьём лучи на 2 группы — те, которые сначала отразились от верхнего зеркала, и те, которые сначала отразились от нижнего (горизонтального) зеркала.

Тогда, за точку A_i мы будем обозначать пересечение первой группы лучей, и через точку B_i — пересечение 2 группы лучей. Изображение будет появляться тогда, когда B_i совпадёт с A_j (i может быть $\neq j$), т.к. это будет точка пересечения всех лучей.

Заметим, что чтобы построить A_{i+1}, нужно отразить A_i отн. зеркала, отличного от того, от которого было отражено A_{i-1} для получения A_i. Также заметим, что $B_0 = A_0 = (5;3)$

№3 (продолжение)

Отражение точки отн. нижнего зеркала можно представить в виде операции:

$(x, y) \to (x, -y)$

Отражение же относительно верхнего зеркала есть операция:

$(x, y) \to (y, x)$

и эти ~~корр~~ операции чередуются.

Выпишем все A_i и B_i для $0 \le i \le 8$:

i	A_i	B_i
0	(5;3)	(5;3)
1	(3;5)	(5;-3)
2	(3;-5)	(-3;5)
3	(-5;3)	~~(-3;-5)~~
4	(-5;-3)	~~(-5;-3)~~
5	(-3;-5)	~~(-5;3)~~
6	(-3;5)	~~(3;-5)~~
7	~~(5;-3)~~	~~(3;5)~~
8	(5;3)	(5;3)

после 8-го шага операции зацикливаются, т.к. мы вернулись в A_0 и B_0, а операции зависят лишь от координат точек, которые повторились. Заметим, что при $0 < i, j < 8$ и $i \ne j$ $A_i \ne A_j$, и для любого A_i есть B_j такое, что $A_i = B_j$. Следовательно, всего будет 8 изображений, которые перечислены в таблице (каждое из них либо $(\pm 5; \pm 3)$ либо $(\pm 3; \pm 5)$). При этом, первым будет такое, для которого $A_i = B_j$ $\max(j, i)$ - минимален. Это - A_4 и B_4 (-5;-3)

Ответ: 8 изображений; первое - (-5;-3)