шифр 61/2-09-07

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	9	12	13	4	0	10	9	15	72

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Вариант 1

N 1.

1. Сначала нужно исключить все чётные числа, т.к. если есть хотя бы одно чётное, произведение не может оканчиваться нечётной цифрой.

Здесь чётных чисел ровно половина, т.е. $\frac{2022}{2} = 1011$.

2. Далее нужно исключить все числа, кратные 5. Их всего $\frac{2022}{5} = 404{,}4$ — 404, округляем вниз. Однако половину из них мы уже вычеркнули как чётные. Значит, нужно вычеркнуть $\frac{404}{2} = 202$ числа.

~~3. И нужно вычеркнуть ещё одно нечётное число.~~

~~Всего $1011 + 202 + 1 = 1214$ чисел~~

~~Ответ: 1214 чисел.~~

3. Остаются только числа, оканчивающиеся на 1, 3, 7, 9.

Первые никак не изменяют последнюю цифру, их вычёркивать не нужно.

Числа, делящиеся на 3:

$2022 : 3 = 674$ (18; 22; 21; 12), из которых ~~2022~~ $674 : 3 = 224$ (6; 7; 6; 14)

делятся на 9. Девятка в любой чётной степени даёт произведение, оканчивающееся на 1, их не надо вычёркивать.

Также $2022 : 7 = 288$ (14; 62; 56; 62) чисел делятся на 7.

Учитывая, что $3 \cdot 7$ оканчивается на 1, то нужно рассмотреть разницу чисел, кратных 3 и 7.

$674 - 288 = 386$ чисел. ~~384 даёт остаток 2~~

Каждые 4 тройки дают.

3. Также достаточно вычеркнуть ещё одно число. Всего $1011 + 202 + 1 = 1214$ чисел.

Ответ: 1214 чисел.

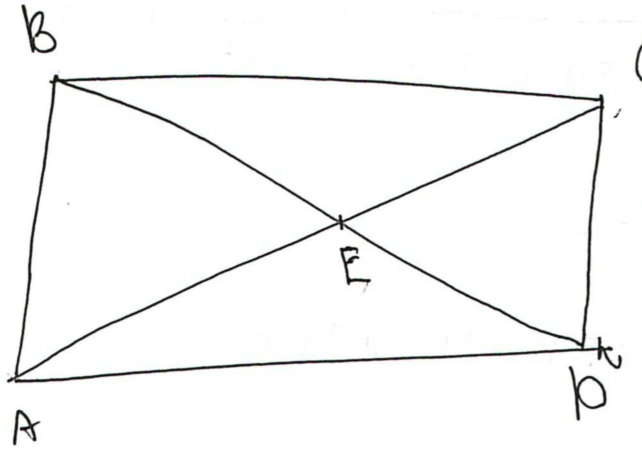
Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 61/2-09-07

Задание	1	2	3	4	5	6	7	Всего
Баллы								

Вариант 1

№ 2.



1. Заметим, что $\triangle ABD$ состоит из $\triangle ABE$ и $\triangle AED$ $\Rightarrow$ $\cancel{S_{ABE} = S_{A}}$ $S_{ABD} = S_{ABE} + S_{AED} \Rightarrow S_{ABE} = S_{ABD} - S_{AED} = 10 - 6 = 4$ см2.

Аналогично, $S_{ACD} = S_{AED} + S_{ECD}$,

$S_{ECD} = S_{ACD} - S_{AED} = 9 - 6 = 3$ см2.

2. Пусть $\angle AED = \alpha$. Тогда, как смежные, $\angle BEA = 180° - \alpha$, $\angle CED = 180° - \alpha$, $\angle BEC = \alpha$. Но $\sin\alpha = \sin(180 - \alpha)$. Соответственно, синусы всех этих углов равны.

3. Рассмотрим $\cancel{\triangle AE}$ $\triangle AED$ и $\triangle ABE$.

$S_{ABE} = \frac{BE \cdot EA \cdot \sin\angle BEA}{2}$; $S_{AED} = \frac{AE \cdot ED \cdot \sin\angle AED}{2}$;

Учитывая, что $\sin\angle BEA = \sin\angle AED$ из п. 2,

то $\dfrac{S_{ABE}}{S_{AED}} = \dfrac{BE \cdot EA}{AE \cdot ED} = \dfrac{BE}{DE} \Rightarrow \dfrac{BE}{DE} = \dfrac{S_{ABE}}{S_{AED}} = \dfrac{2}{3}$.

Аналогично для $\triangle AED$ и $\triangle CED$, $\sin\angle AED = \sin\angle CED$;

$$\frac{S_{AED}}{S_{CED}} = \frac{2\, AE \cdot ED \cdot \sin\angle AED}{2\, CE \cdot ED \cdot \sin\angle CED} = \frac{AE}{CE};$$

$$\frac{AE}{CE} = \frac{S_{AED}}{S_{CED}} = 2;$$

Рассмотрим $\triangle AED$ и $\triangle BEC$.

$$\frac{S_{AED}}{S_{BEC}} = \frac{2 \cdot AE \cdot ED \cdot \sin\angle AED}{2 \cdot BE \cdot EC \cdot \sin\angle BEC} = \frac{AE \cdot ED}{BE \cdot EC}$$

($\angle BEC = \angle AED$ как вертикальные, $\sin\angle BEC = \sin\angle AED$).

$$\frac{S_{AED}}{S_{BEC}} = \frac{AE}{CE} \cdot \frac{DE}{BE} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3;$$

$$S_{BEC} = \frac{S_{AED}}{3} = 2 \text{ см}^2.$$

$$S_{ABCD} = S_{ABE} + S_{BEC} + S_{CED} + S_{AED} =$$
$$= 6 + 4 + 3 + 2 = 15 \text{ см}^2.$$

Ответ: 15 см².

4

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 61/2-09-07

Задание	1	2	3	4	5	6	7	Всего
Баллы								

Вариант 1

№ 3.

Рассмотрим трёхчлен $x^2+(p+n)x+q+n$;

$D=b^2-4ac=(p+n)^2-4(q+n)=$

$=p^2+2pn+n^2-4q-4n$;

$D=n^2+2np-4n-4q+p^2$ (1)

Для выражения (1) дискриминант равен $(2p-4)^2-4(p^2-4q)=$

$=4p^2-16p+16-4p^2+16q=16(q+1-p)$;

отсюда получаем $q=p-1$.

Соответственно, трёхчлен ~~св~~ x^2+px+q, удовлетворяющий условию, имеет вид $x^2+px+p-1$.

Для него $D=b^2-4ac=p^2-4(p-1)=$

$=p^2-4p+4=(p-2)^2$. Если ~~прир~~ приравнять дискриминант к 0, получим $p=2$; $q=p-1=1$.

Соответственно, трёхчлен имеет вид x^2+2x+1

Ответ: существует; x^2+2x+1.

№ 4.

~~Заметим,~~ Воспользуемся раскраской, похожей на шахматную, только на поле 6×8. Тогда уголок будет состоять из двух клеток одного цвета и одной — другого, т.е. может иметь только 2 вида:

(~ — черный цвет, иначе — белый).

Соответственно, для того, чтобы нельзя было поставить ни один уголок кроме уже из стоящих, нужно не оставить свободных клеток одного из цветов. ~~Занять все~~ Если пользоваться уголками только одного вида, то их потребуется $\frac{24}{2} = 12$ (клеток одного любого цвета — ~~24~~ 24; уголок способен занять 2 из них). Меньше не получится, т.к. останутся клетки обоих цветов. Останется 12 клеток одного цвета, которые невозможно занять уголками (в данном примере они отмечены как X).

Пример:

~	X	~	2	~	X	~	
1	~	X	~	3	~	X	~ 4
~	5	~	6	~	7	~	8
X	~	X	~	X	~	X	~
~	X	~	11	~	X	~	9
12	~	X	~	10	~	X	~

Ответ: 12.

~4

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 61/2-09-07

Задание	1	2	3	4	5	6	7	Всего
Баллы								

Вариант 1

№ 6.

Если все ~~шарниры~~ стержни одинаковы, то $AB = BC = CD = AD$. Тогда, если $\angle ABC = 90^\circ$, то $ABCD$ — квадрат (прямой угол + 4 стороны равны). В таком случае AC — диагональ квадрата. В квадрате диагональ в $\sqrt{2}$ раза больше стороны т.е. $AC = AB\sqrt{2}$.

Допустим, данная конструкция была сложена. Если начать её равномерно раскрывать ~~на~~ до $\angle ABC = 90^\circ$, то точка ~~B~~ B пройдёт расстояние AB, а точка C — AC (точка A неподвижна по условию). Допустим, на это ушёл какой-либо интервал времени Δt.

Тогда ~~перемещение~~ для v_B:

$v_B = \frac{AB}{\Delta t}$; а для v_C: $v_C = \frac{AC}{\Delta t} = \frac{AB\sqrt{2}}{\Delta t}$.

Отсюда $\frac{v_C}{v_B} = \sqrt{2} \Rightarrow v_B = \frac{v_C}{\sqrt{2}}$.

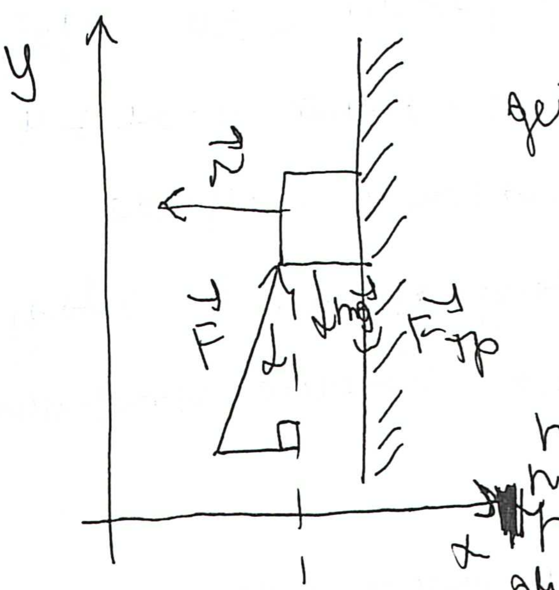
7

⇒ Учитывая, что $\sqrt{2} \approx 1,41 \approx 1,4$:

$$\begin{array}{r|l} -50 & 14 \\ 42 & 3,57 \approx 3,6 \text{ см/с} \\ -80 & \\ 70 & \\ -100 & \\ 98 & \\ 2 & \end{array}$$

Ответ: 3,6 см/с. √10

№ 7.



Расставим все силы, действующие на данную систему.

Т.к. проекция $\vec{F}$ на вертикальную ось положительна, то сила трения направлена против возможного направления движения, т.е. вниз.

На брусок также действует сила реакции опоры, направленная перпендикулярно стенке, или параллельно оси x.

По 2 з.н.: $\vec{F} + \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{тр} = m\vec{a} = 0$, т.к. $a = 0$ ~~из условия~~ по условию.

~~Пр~~ Спроецируем силы на оси x и y:

$$\begin{cases} x: \cancel{N - F\sin\alpha = 0} \quad F\sin\alpha - N = 0 \\ y: F\cos\alpha - F_{тр} - mg = 0 \end{cases}$$

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 61/2-09-07

Задание	1	2	3	4	5	6	7	Всего
Баллы								

Вариант 1

Учтём, что в любом случае $F_{тр} = \mu N$.

Тогда $\begin{cases} N = F\sin\alpha \\ F\cos\alpha - \mu N - mg = 0 \end{cases}$

$\Downarrow$

$\cancel{F}$ $F\cos\alpha - \mu F\sin\alpha - mg = 0$

Выразим F:

$$F = \frac{mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}.$$

Осталось только вычислить и найти значение F ($g = 10$ м/с^2 и $\sqrt{3} \approx 1,7$):

$$F = \frac{1 \cdot 10}{0,5 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,1} = \frac{10}{0,5 - \frac{1,7}{2} \cdot 0,1} =$$

$$= \frac{10}{0,5 - 0,085} = \frac{10}{0,415} = \frac{10000}{415}.$$

$$\begin{array}{r|l} -10000 & 415 \\ 830 & \overline{24,1} \\ \hline 1700 & \\ 1660 & \\ \hline 400 & \end{array} \approx 24,1 \text{ Н} \approx 24 \text{ Н}$$

Ответ: 24 Н. ~~9~~

№ 8.

9

№ 8.

При последовательном соединении сила тока ~~на~~ лампе и на резисторе будет одинаковой.

~~Отсюда~~ $\cancel{U_0 = IR + IR_л}$

$$\cancel{R_л = \frac{U_0 - IR}{I} = \frac{U_0}{I} - R.}$$

Если U – напряжение на лампе, а I – ток в цепи, то:

$$U_0 = IR + U; \; R \; I = \frac{U_0 - U}{R}.$$

Заметим, что при $U \approx 10$ В

$$I \approx \frac{30-10}{10}; \; I \approx 2 \text{ А}.$$

А на этом участке графика зависимость практически линейна. Значит, сопротивление лампы можно найти, разделив напряжение ~~в любой точке~~ на силу тока: $R_л = \frac{U}{I} = \frac{10}{2} = 5$ Ом.

А мощность лампы можно рассчитать по любой из этих формул как $\frac{U^2}{R}$, I^2R, UI. ~~В любом случае~~

получим $P = 20$ Вт.

Ответ: 20 Вт.