Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 52-10-10

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	11	12	13	—	0	10	10	—	56б

1

Вариант 1

№1

Пусть первое из последовательных чисел – n.

Тогда остальные числа: $n+1$; $n+2$; $n+3$.

Рассмотрим все варианты групп по 2 числа.

I вариант:

$n(n+1)+2022=(n+2)(n+3)$

$n^2+n+2022=n^2+5n+6$

$4n=2016$

$\Rightarrow n=504$

Тогда получается ряд чисел: 504; 505; 506; 507.

II вариант:

11

$n(n+2)+2022=(n+1)(n+3)$

$n^2+2n+2022=n^2+4n+3$

$2n=2019$

$\Rightarrow n$ – дробное число, что противоречит условию задачи

$\Rightarrow$ решений нет.

III вариант:

$n(n+3)\pm 2022=(n+1)(n+2)$ – (мы точно не уверены, какое произведение больше)

$n^2+3n\pm 2022=n^2+3n+2$

$2=\pm 2022$

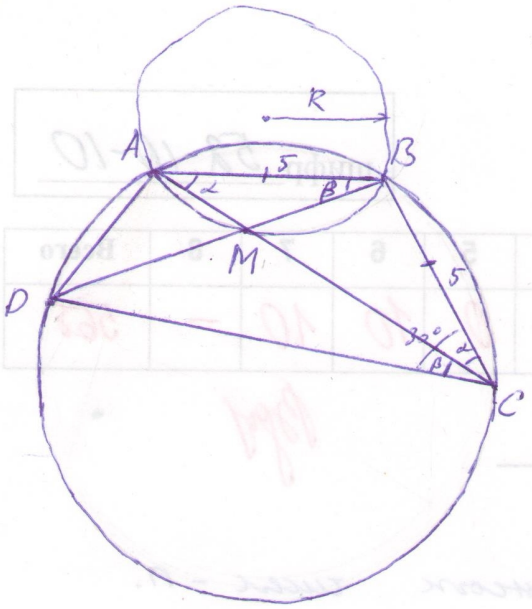
$\Rightarrow$ решений нет

$\Rightarrow$ 504, 505, 506, 507 – единственно возможная последовательность натуральных чисел.

Ответ: 504, 505, 506, 507

2

№ 2.



Дано:

ABCD – четырехугольник

он вписан в окружность

$AB = BC = 5$

$\angle BCD = 30°$

(·)M – (·) пересеч. диагоналей ABCD

R – ?

Решение

Пусть $\angle BCA = \alpha$, $\angle ACD = \beta$

1) Рассмотрим $\triangle ABC$

$AB = BC$

$\Rightarrow \triangle ABC$ – равнобедренный

$\Rightarrow \angle BAC = \angle BCA = \alpha$.

2) Заметим, что $\angle ACD$ и $\angle ABD$ – вписанные углы, опирающиеся на одну дугу.

$\Rightarrow \angle ACD = \angle ABD = \beta$

3) $\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD = \alpha + \beta$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 30°$

4) Рассмотрим $\triangle AMB$

$\angle AMB = 180° - \alpha - \beta = 180° - (\alpha + \beta) = 150°$

5) Воспользуемся теоремой синусов для $\triangle ABM$.

$$\frac{AB}{\sin\angle AMB} = 2R$$

$$\Rightarrow R = \frac{AB}{2\sin\angle AMB} = \frac{5}{2\sin 150°} = \frac{5}{2\sin 30°} = \frac{5}{2\cdot\frac{1}{2}} = 5$$

Ответ: $R = 5$

12

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 52-10-10

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

3

Вариант 1

№3

p - простое число, n - целое число

$\frac{n^3-pn+1}{n^2+pn+2}$ - целое число.

Рассмотрим случай, если p - нечетное.

Тогда при n - нечетное, числитель - нечетный, а знаменатель - четный.

При n - четное, числитель - нечетный, а знаменатель - четный

Т.О. при p - нечетное и любом n ~~дробь нечет/чет~~, числитель - нечетный, а знаменатель четный и выражение получится дробным, что противоречит условию задачи.

$\Rightarrow$ p - четное. Так же известно, что p - простое

$\Rightarrow p=2$ (единственно возможный вариант)

Разделим числитель получившегося выражения на его знаменатель:

$$\begin{array}{l|l} -\ n^3-2n+1 & n^2+2n+2 \\ \quad n^3+2n^2+2n & n-2 \\ \hline \quad -2n^2-4n+1 & \\ -\ -2n^2-4n-4 & \\ \hline \quad \text{ост. } 5 & \end{array}$$

$\Rightarrow \frac{n^3-2n+1}{n^2+2n+2} = n-2+\frac{5}{n^2+2n+2}$

Получившееся выражение должно быть целым. $n-2$ целое в любом случае т.к. n - целое

$\Rightarrow \frac{5}{n^2+2n+2}$ должно быть целым.

Такое возможно в двух случаях

1) $n^2+2n+2=5$

$n^2+2n-3=0$

$D=4+12=16$

2) $n^2+2n+2=1$

$n^2+2n+1=0$

$D=4-4=0$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$ $\qquad$ $x = \frac{-2}{2} = -1$

4

$x_1 = 1$ $\qquad$ $x_2 = 3$

13

Ответ: $p = 2$; $n \in \{-3; -1; 1\}$

№ 6

Дано:

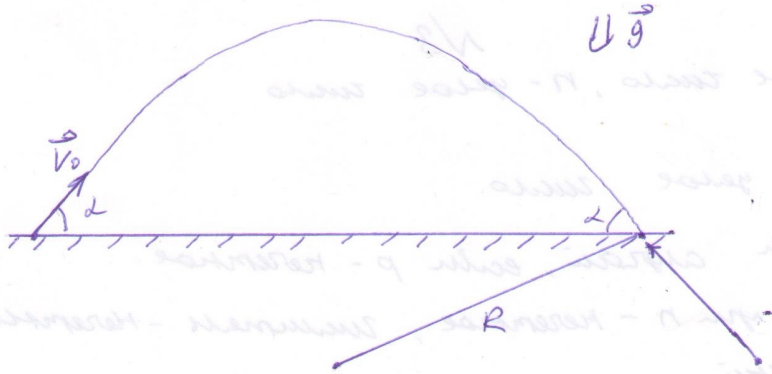
$\alpha = 60°$

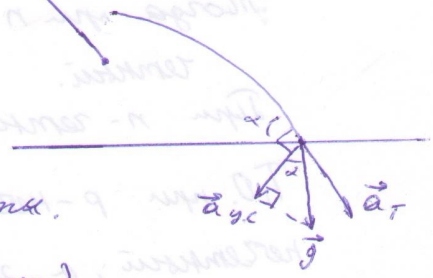
$V_0 = 10 м/с$

$g = 10 м/с^2$

R - ?

Решение





Будем считать, что в конце пути камень двигался по окружности.

$V_{кон} = V_0 = 10 м/с$ (при отсутствии $F_{сопр}$)

$\vec{g} = \vec{a}_T + \vec{a}_{ц.с}$

~~$\vec{a}_{ц.с} = \vec{g}\cos\alpha$ (из выполного рисунка)~~

$a_{ц.с} = g\cos\alpha$ (из выполного рисунка)

$a_{ц.с} = \frac{V_{кон}^2}{R}$

$\Rightarrow R = \frac{V_{кон}^2}{a_{ц.с}} = \frac{V_{кон}^2}{g\cos\alpha} = \frac{100 м^2/с^2}{10 м/с^2 \cdot \cos 60°} = \frac{10 м}{\frac{1}{2}} = 20 м$

Ответ: $R = 20 м$

10б

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 52-10-10

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

5

Вариант 1

№7

Дано:

$V = 1{,}5\ л$

$\Delta T = 5°C$

$P = 1{,}5\ кВт$

$t_1 = 2\ мин$

$c = 4200\ \frac{Дж}{кг \cdot K}$

$\rho_в = 1\ г/см^3$

t_2 - ?

СИ

$1{,}5 \cdot 10^{-3}\ м^3$

$5\ K$

$1500\ Вт$

$120\ сек$

$1000\ кг/м^3$

Решение.

$Q_{ост_1} = cm\Delta T$. $m = \rho V$

$\Rightarrow Q_{ост_1} = c\rho V\Delta T$

Узнаем, с какой скоростью остывала вода (с какой скоростью шел теплообмен с окр. средой)

$V_{ост} = \frac{Q_{ост_1}}{t_1} = \frac{c\rho V\Delta T}{t} = \frac{4200\frac{Дж}{кг \cdot K} \cdot 1000\frac{кг}{м^3} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3} м^3 \cdot 5K}{120\ сек} = 262{,}5\ \frac{Дж}{с}$

При нагревании будет происходить такая же теплоотдача т.е. $E_{чайника}$ будет уходить на нагревание воды и на теплоотдачу окр. средв. (потери).

$E_{чайн} = Q_{нагр} + Q_{ост_2}$

$E_{чайн} = P \cdot t_2$

$Q_{нагр} = cm\Delta T = c\rho V\Delta T$

$Q_{ост_2} = V_{ост} \cdot t_2$

$Pt_2 = c\rho V\Delta T + V_{ост} t_2$

$\Rightarrow t_2 = \frac{c\rho V\Delta T}{P - V_{ост}} = \frac{4200\frac{Дж}{кг \cdot K} \cdot 1000\ кг/м^3 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3} м^3 \cdot 5K}{1500\ Вт - 262{,}5\ \frac{Дж}{с}} \approx$

$\approx 25,4$ сек.

Ответ: $t_1 = 25,4$ сек.

10б

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

№5

Дано:

$V = const$

$a = 5 м/с^2$

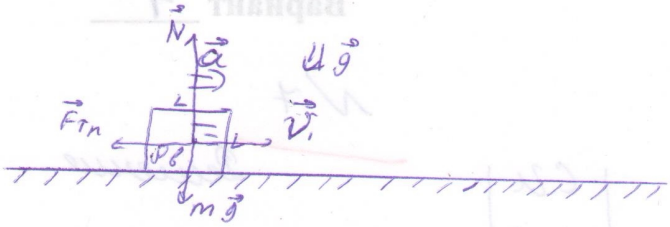
$P_{min} = 1000$ Па

$L = 10$ см

$g = 10 м/с^2$

P_{max} - ?

Решение



0б