При $z=0$; $y=1$
При $z=1$; $y=1$ $\Big\}$ $z=0;1$

ответ угадан

При $z=0$

$$\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^4+\left(\frac{2\cdot 0}{1+t^2}\right)^5=1 \Rightarrow \frac{2t}{1+t^2}=\pm 1 \Rightarrow t=1$$

При $z=1$

$$\left(\frac{2t}{1+t}\right)^4+\left(\frac{2}{2}\right)^5=1 \Rightarrow \frac{2t}{1+t^2}=0 \Rightarrow t=0$$

Итого: $[1;0]$ $[0;1]$ $[-1;0]$

вернёмся к x и y

$t=tg\frac{\alpha}{2}$ $\quad tg\frac{\alpha}{2}=1$ $\quad \frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi k$

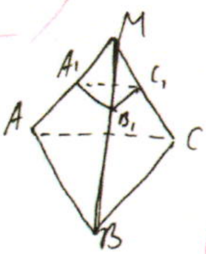
$tg\frac{\alpha}{2}=0$ $\quad 2\pi k$

$tg\frac{\alpha}{2}=-1$ $\quad \frac{\alpha}{2}=-\frac{\pi}{4}+\pi k$

3б

Ответ: $[\cancel{2\pi k}\ \frac{\pi}{2}+2\pi k; 2\pi k]$; $[2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k]$; $[-\frac{\pi}{2}+2\pi k; 2\pi k$

№3



Дано:
$V_{MABC}=324$
$V_{MA_1B_1C_1}=96$
$V_{MAB_1C_1}$ - ?

Решение:
1) Через V пирамиды найдём коэф. подо

(k)

$k^3=\frac{V_{MABC}}{V_{MA_1B_1C_1}}$ $\quad k=\sqrt[3]{\frac{V_{MABC}}{V_{MA_1B_1C_1}}}=\sqrt[3]{\frac{324}{96}}=\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=$

13б

2) $V_{MAB_1C_1}=V_{MA_1B_1C_1}+V_{AA_1B_1C_1}$, т.к. $V_{MA_1B_1C_1}$ · V любой пирамиды равен $\frac{1}{3}S$
h, т.к. $(A_1B_1C_1)\parallel(ABC)$, то $h_{AA_1B_1C_1}$ расстояние от $(A_1B_1C_1)$ до (ABC),
$K=\frac{3}{2}$, то

$$\frac{h_{MABC}}{h_{MA_1B_1C_1}}=\frac{3}{2}$$, а т.к. $h_{AA_1B_1C_1}=h_{MABC}-h_{MA_1B_1C_1}=\frac{3}{2}h_{MA_1B_1C_1}-h_{MA_1B_1}$

$=\frac{1}{2}h_{MA_1B_1C_1}$

$V_{MAB_1C_1}=V_{A_1B_1C_1M}+\frac{1}{2}V_{MA_1B_1C_1}=\frac{3}{2}V_{MA_1B_1C_1}=\frac{3}{2}\cdot 96=144$

Ответ: 144

6

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 23-11-07

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	10	3	13	14					

Вариант 1

№1 10б

$\begin{cases} 2b > 4a + c \\ 4a + c > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} b > 2a + \frac{c}{2} \\ 2a + \frac{c}{2} > 0 \end{cases}$ Док-ть: $b^2 > 4ac$

Выражение $b^2 > 4ac$ верно в том случае, если $4a^2 + 2ac + \frac{c^2}{4} \geq$

$4a^2 - 2ac + \frac{c^2}{4} \geq 0$

$(2a - \frac{c}{2})^2 \geq 0$ будет всегда верно, т.к. отриц. быть не может $4a^2 - 2ac + \frac{c^2}{4}$ Выражен

$b^2 > 4a^2 + 2ac + \frac{c^2}{4} \geq 4ac$ $4ac$ – доказано $b^2 > 4ac$

№2

Пусть $t = tg\frac{\alpha}{2}$, тогда

$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\begin{cases} \sin^4 x + \sin^5 y = 1 \\ \cos^3 x + \cos^7 y = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^4 + \left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^5 = 1 \\ \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^3 + \left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)^7 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 = \left(1 - \left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^5\right)^{\frac{1}{2}} \\ \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 = \left(1 - \left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)^7\right)^{\frac{2}{3}} \end{cases}$

из $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$1 = \left(1 - \left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^5\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 - \left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)^7\right)^{2/3}$

$\begin{cases} y = 1 \\ y = \left(1 - \left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^5\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 - \left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)^7\right)^{\frac{2}{3}} \end{cases}$

неравносильное преобразование (возможна потеря решения)

$\sqrt[3]{a}$ м/б ≥ 0 или ≤ 0, но $(\sqrt[3]{a})^2 \geq 0$

№7

Действующее напряжение $U_д$ - напряжение при котором в цепи выделилось такое же кол-во теплоты. Запишем для цепи с сопротивлением R

$$\frac{U_1^2}{R}t_0+\frac{U_2^2}{R}t_0+\frac{U_3^2}{R}t_0+\frac{U_4^2}{R}t_0=\frac{U_д^2}{R}4t_0$$

$$U_1^2+U_2^2+U_3^2+U_4^2=4U_д^2$$

$$U_д=\sqrt{\frac{U_1^2+U_2^2+U_3^2+U_4^2}{4}}$$

$$U_д=\sqrt{\frac{100+25+0+25}{4}}=\sqrt{37,5}=6,124 В$$

Ответ: 6,124 В

15 б

№8

Т.к. 40% молекул диссоциировали на атомы, следовательно, кол-во увелич. в 1,4 раза:

$\nu_2=1,4\nu_1=2,8$ моль, т.к. $P=const$, то из ур-ия Менделеева-Клайперона:

$$PV=\nu RT \quad P_1V_1=\nu_1RT_1$$

$$P_2V_2=\nu_2RT_2 \quad T_2=\frac{\nu_1V_2}{\nu_2V_1}T_1$$

$$T_2=\frac{\nu_1 3V_1}{1,4\nu_1 V_1}T_1=\frac{30}{14}T_1\approx 643 K$$

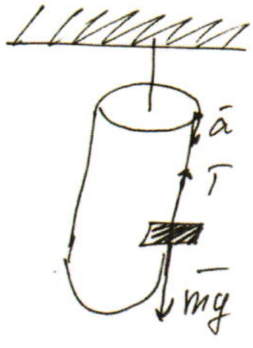
$$A=p\Delta V=\nu_2RT_2-\nu_1RT_1=9975 \text{ Дж - значит}$$

Ответ: ~~643~~; 9975

10 б

№5

Если обезьяна удерживается на одной и той же высоте со стороны верёвки на неё действует $F = mg$. Такая же сила действует на верёвку и разгоняет её от нулевой v до $v = at$, ускорение определим из условия равнов.. $aM = mg$ $a = \frac{mg}{M}$



$N = Fv$ – мощность

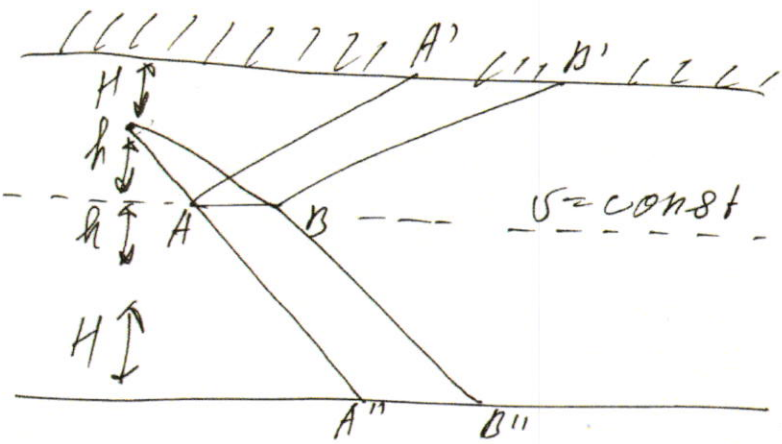
$N = mgv = mgat = \frac{(mg)^2}{M} \cdot t$

$N = \frac{(30 \cdot 10)^2}{5} \cdot 2 = 36 \cdot 10^3$ Вт

Ответ: $36 \cdot 10^3$ Вт

10б

№6



Дано:
AB – зеркало
A'B' – солнеч. зайчик
A''B'' – изобр. солнеч. зайчика

Решение: $A'B' = A''B''$, т.к. зеркало также и экран

Любое положение зеркала AB по линии движения даёт построение двух подобных ΔASB и $\Delta A''S''B''$. Исходя из правил подобных треуг. нам известно, что отношение высот первого треуг. к высоте второго равна отношению подобных сторон

$\frac{h}{2h+H} = \frac{AB}{A''B''}$, где $A''B'' = A'B' \Rightarrow \frac{h}{2h+H} = \frac{AB}{A'B'}$, т.к. h const

$2h + H = const$, то следовательно $A'B' = const$, т.е. A'B' остаётся неизменным, размер солнеч. зайчика не изменяется.

Размеры солнеч. зайчика изменятся в 4 раз $\frac{A'B'}{}$ $H = h - ...$

15б

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 23-11-07

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	10	3	13	14	10	15	15	10	90

без изм

без изм

Вариант 1   без изменений

14б

№4

У нас возможно 2 случая:

I случай (датчик выполняет неэффективные действия):
Датчик может выполнять неэффективные действия, например $+1$, затем -1, тогда датчик может привести к любому квадратному трёхчлену ($a=1$ и решения с целыми корнями будут, например: $x^2+20x+36=0$ целые корни -18

II случай (датчик выполняет только эффект. действия)
Пусть у нас будут целые корни x_1 и x_2
$ax^2+bx+c=0$, из теоремы Виета для $a=1$, значит $x_1+x_2=-b$
$x_1x_2=c$ ($a=1$ - по условию, датчик не может на это влиять.
Т.к. трёхчлен $x^2+20x+22$, преобр. в $x^2+202x+2$, то мы можем увидеть, что b и c - в случае эффект. действий всегда понижают.

Если квадрат. трёхчлен с целыми корнями существует, то для него выполняются условия

$$\begin{cases} -202 \le x_1+x_2 \le 20 \\ 2 \le x_1x_2 \le 22 \end{cases}$$

Решение возможно, например -20 и -1

Т.к. x_1 и x_2 - целые, то мы можем заметить, что если один из корней $x=-1$, а другой ($-n$) - целое число, то $b=n+1$; $c=n$ $\Rightarrow c=b-1$)
А т.к. b и c „движаются“ на встречу друг другу, с от 22 до 2, b от 20 до 202, то точно будет ситуация, когда $c=b-1$, например $x^2+22x+21$ (корни -21; -1)

Ответ: среди полученных в процессе трёхчленов есть такой, у которого будут целые корни