Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 72/1-11-01

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	10	3	13	14	4	15	10	0	69

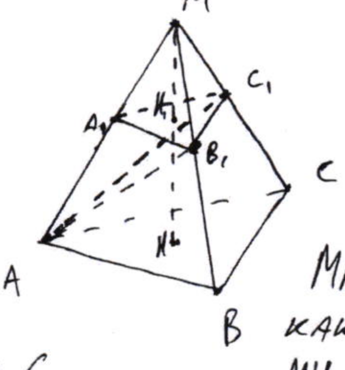
Вариант 2

1. По неравенству ~~КО~~ о средних: $\frac{81a^2+c^2}{2} \geq \sqrt{81a^2 \cdot c^2} = 9ac$; $81a^2+c^2 \geq 18ac$;

$3b > 9a+c > 0$; $9b^2 > 81a^2+18ac+c^2 \geq 18ac+18ac = 36ac$; $b^2 > 4ac$. Ч.Т.Д.

+

3.



Дано: $V = 375$, $V_1 = 81$. $(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$. A_1, B_1, C_1 лежат на MA, MB и MC соответственно.

Найти: $V_{AMB_1C_1}$

Решение: Д.п.: MH_1 - высота в $MA_1B_1C_1$, MH - высота в $MABC$ ($H_1 \in MH$). Тетраэдры $MABC$ и $MA_1B_1C_1$ подобны (так как $MA_1B_1C_1$ отсекается от $MABC$ параллельной основанию плоскостью). Следовательно: $\frac{MH_1}{MH} = \sqrt[3]{\frac{V_1}{V}} = \sqrt[3]{\frac{81}{375}} = \sqrt[3]{\frac{3^4}{5^3 \cdot 3}} = \sqrt[3]{\frac{3^3}{5^3}} = \frac{3}{5}$. $MH = MH_1 + H_1H$.

$MH_1 = MH \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}HH_1 + \frac{3}{5}MH_1$; $\frac{2}{5}MH_1 = \frac{3}{5}HH_1$; $HH_1 = \frac{2}{3}MH_1$. $V_1 = \frac{1}{3}MH_1 \cdot S_{A_1B_1C_1}$. $V_{AA_1B_1C_1} =$

$= \frac{1}{3} \cdot HH_1 \cdot S_{A_1B_1C_1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot MH_1 \cdot S_{A_1B_1C_1} = \frac{2}{3}V_1 = \frac{2}{3} \cdot 81 = 54$. $V_{AMB_1C_1} = V_1 + V_{AA_1B_1C_1} = 81+54 = 135$

Ответ: 135.

+

4. Верно. Рассмотрим трёхчлен $x^2 - ax + b$ с целыми числами a и b. В нём $b = x_1x_2$, $a = x_1+x_2$, по теореме Виета. Заметим, что если разность ~~между~~ b и a равна одному, то ~~в уравнении будет~~ у квадратного трёхчлена можно будет найти 2 целых корня – 1 и b (ведь, если $x_1 = 1$, а $x_2 = b$, то условия $b = x_1x_2$ и $a = x_1+x_2$). Изначальный трёхчлен – $x^2-20x+22$, в нём разность b и a равна 2. В конечном трёхчлене $x^2-202x+2$ разность эта равна -200. Коэффициент перед x или свободный член за одно действие можно либо увеличить, либо уменьшить на один, а значит разность b и a за каждое действие либо увеличивается, либо уменьшается на один. Такими действиями нельзя снизить разность с 2 до -200, не получив хотя бы один случай с разностью 1. Тогда хотя бы в одном из трёхчленов, образованных такими действиями, найдутся целые корни.

+

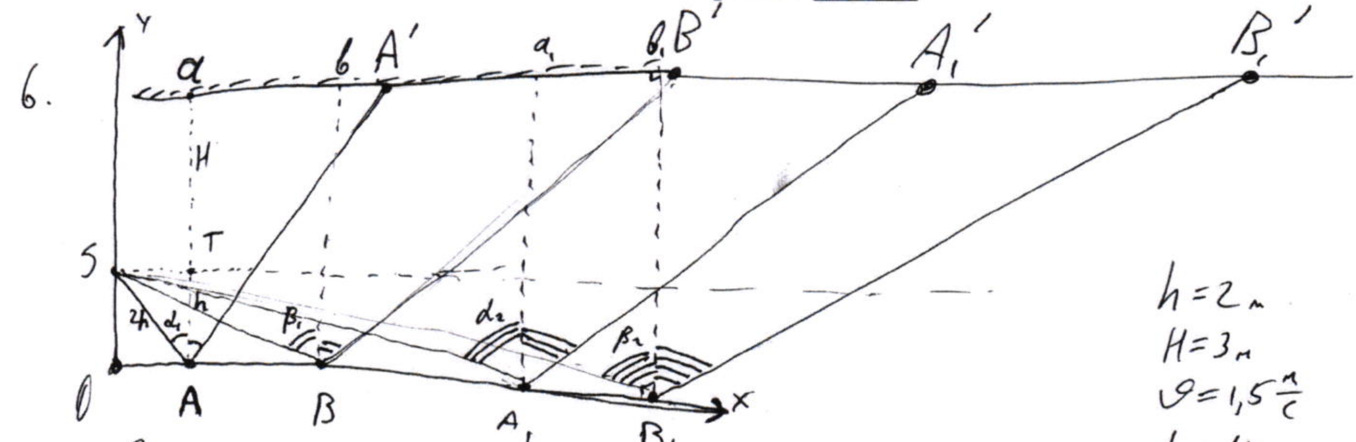
шифр 72/1-11-01

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

6.



$h = 2$ м
$H = 3$ м
$\vartheta = 1{,}5 \frac{м}{с}$
$t = 4$ с

Введём систему координат с осью Ox параллельной стене. A_1B_1 – это положение зеркала через 4 с. a, b, a_1 и b_1 – проекции (ортогональные) A, B, A_1 и B_1 (соответственно) на стену. ~~Тогда~~ ~~$A'B'$~~ $A'B'$ и $A_1'B_1'$ – это изображения солнечных зайчиков от источника света S на стене. Угол падения равен углу отражения. Пусть $\angle SAa = \alpha_1$, $\angle SBb = \beta_1$, $\angle SA_1a_1 = \alpha_2$, $\angle SB_1b_1 = \beta_2$. $\alpha_1 = 60^\circ$ (т.к. $\cos\alpha_1 = \frac{1}{2}$). $A\{2\sqrt{3}; 0\}$ $(2h \cdot \sin\alpha_1 = 2\sqrt{3})$. Как тогда найти координаты ~~A'~~ $A'\{x_{A'}; y_{A'}\}$? $y_{A'} = h + H = 5$, а $x_{A'} = x_A + aA' = x_A + Aa \cdot tg\alpha_1 = x_A + 5 \cdot \frac{x_A}{h} = x_A + 2{,}5x_A = 3{,}5x_A = 7\sqrt{3}$. $tg\alpha_1 = \frac{x_A}{h} = \frac{x_A}{2}$ (из треугольника STA, где $T \in Aa$, $Ta = H$, $TA = h$). Аналогично: $tg\beta_1 = \frac{x_B}{2}$, $tg\alpha_2 = \frac{x_{A_1}}{2}$, $tg\beta_2 = \frac{x_{B_1}}{2}$. Координаты A' мы нашли так: $x_{A'} = x_A + 5tg\alpha_1 = x_A + 5 \cdot \frac{x_A}{2} = 3{,}5x_A$. Учитывая, что мы знаем значения тангенсов, найдём и координаты ~~други~~ точек B', A_1', B_1', найдя сперва координаты B, A_1 и B_1: обозначим длину AB за n; координаты A_1 ~~же~~ равны $\{x_A + \vartheta t; 0\}$, а $B_1\{x_B + \vartheta t; 0\}$.

$A\{2\sqrt{3}; 0\}$; $A'\{7\sqrt{3}; 0\}$; $B\{2\sqrt{3}+n; 0\}$; $B'\{7\sqrt{3}+3{,}5n; 0\}$; $A_1\{6+2\sqrt{3}; 0\}$; $A_1'\{21 + 7\sqrt{3}; 0\}$; $B_1\{6+2\sqrt{3}+n; 0\}$; $B_1'\{21+7\sqrt{3}+3{,}5n; 0\}$. $A_1'B_1' = 3{,}5n$. $A'B' = 3{,}5n$.

Тогда $\frac{A_1'B_1'}{A'B'} = \frac{3{,}5n}{3{,}5n} = 1$. То есть размеры солнечного зайчика не изменились.

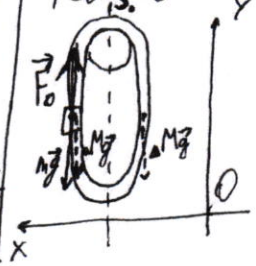
+

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Шифр 72/1-11-01

5. Дано:
$M=8$ кг
$m=20$ кг
$t=3$ с
$g=10\ \frac{м}{с^2}$
P - ?

Решение:



Ось S_0 делит блок симметрично на 2 части. Любая сила тяжести $\Delta M\vec{g}$ компенсируется равносильным ΔMg в точке симметричной относительно S_0. Тогда обезьянка - единственное, что приводит конструкцию в движение своей силой тяжести $m\vec{g}$.

Обезьянка также совершает работу, прилагая силу $\vec{F_0}$, дабы оставаться в равновесии. Второй закон Ньютона: $\vec{F_0}+m\vec{g}=0$, $F_0=mg$.

$A=F_0S$, $S=\frac{gt^2}{2}$. $P=\frac{A}{t}=\frac{F_0S}{t}=\frac{mg\cdot\frac{gt^2}{2}}{t}=\frac{mg^2t}{2}=\frac{20\cdot10^2\cdot3}{2}=3000$ Вт

Ответ: 3000 Вт.

7. Действующее напряжение - это величина напряжения в цепи с постоянным током, эквивалентной по совершаемой работе данной цепи с непостоянным током. ~~Так как отрицательное напряжение также совершает работу, то мы будем считать абсолютные величины.~~

$A=Pt=\frac{U_Д^2}{R}t$. $U_Д^2=\frac{AR}{t}$. $A=A_1+A_2+A_3+A_4=\frac{U_1^2}{R}t_1+\frac{U_2^2}{R}t_2+\frac{U_3^2}{R}t_3+\frac{U_4^2}{R}t_4$

Возьмём значения из графика: $t=4t_0$, $t_1=t_2=t_3=t_4=t_0$, $U_1=50$ В, $U_2=100$ В, $U_3=-50$ В, $U_4=50$ В.

$$U_Д^2=\frac{AR}{t}=\frac{\frac{t_0}{R}(U_1^2+U_2^2+U_3^2+U_4^2)\cdot R}{4t_0}=\frac{U_1^2+U_2^2+U_3^2+U_4^2}{4}=\frac{50^2+100^2+50^2+50^2}{4}=$$

$=\frac{7\cdot50^2}{4}=7\cdot25^2=\cancel{(25\sqrt{7})^2}$. ~~$U_Д=5\sqrt{7}$ В~~. $U_Д=25\sqrt{7}$ В. Ответ: $25\sqrt{7}$ В

+

2. $\begin{cases}\sin^3x+\sin^4y=1\\\cos^3x+\cos^5y=1\end{cases}$

~~Заметим, что $\sin x$, $\cos x$ и $\cos y\geq0$, иначе~~

Заметим, что $\sin^3x\geq0$. Когда $\sin\alpha=0$, $\cos\alpha=1$ ~~Корни~~ или $\cos\alpha=-1$, и наоборот.

Заметим, что $\begin{cases}1+0=1\\0+1=1\end{cases}$ $\begin{cases}0+1=1\\1+0=1\end{cases}$

Подберём подходящие корни. $x_1=2\pi k$; $y_1=\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $y_2=2\pi k$. $k\in Z$

Ответ: $\{2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\}$, $\{\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ 2\pi k\}$, $k\in Z$.