шифр 61/4-09-10

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	11	12	0	8	6	0	10	15	62

Вариант 1

№1

Чтобы произведение ~~было~~ оканчивалось на 1, нужно для начала, чтобы все множители были нечётными ⇒ вычёркиваем из произведения все чётные множители. Всего множителей 2022, а чётных – вдвое меньше, а значит мы вычёркиваем ~~2022:2~~ $\frac{2022}{2} = 1011$ чётных множителей. Далее, среди оставшихся множителей есть оканчивающиеся на 5. При умножении на 5 получается число, последняя цифра которого 5 или 0, что нам не подходит ⇒ вычёркиваем и их. Множителей, оканчивающихся на 5, столько же, сколько и десятков в изначальном кол-во множителей (2022), т.е. 202.

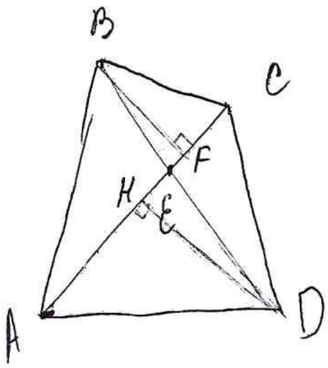
Теперь, ~~ос~~ все оставшиеся множители оканчиваются на цифру, которая в определённой степени даёт 1. Так у нас кол-во множителей оканчивающихся на 1 – 203, на 3 – 202, на 7 – 202 и на 9 – 202. ~~Найдём~~ на Найдём, на что оканчивается произведение этих цифр в степени, равной их кол-ву: $1^{203} \cdot 3^{202} \cdot 7^{202} \cdot 9^{202} = 9^{101} \cdot 7^{202} \cdot 9^{202} = 7^{202} \cdot 9^{303} = 7^{200} \cdot 9^{300} \cdot 7^2 \cdot 9^3$

9^3 ~~окан~~ оканчивается на 9 и 7^2 тоже ⇒ их произведение оканчивается на 1. Осталось найти, на что оканчивается $7^{200} \cdot 9^{300} = (7^2 \cdot 9^3)^{100}$.

Ранее мы объяснили почему $9^3 \cdot 7^2$ оканчивается на 1, отсюда мы можем сказать, что и $(7^2 \cdot 9^3)^{100}$ оканчивается на 1, т.к. 1 в любой степени равно 1 ⇒ достаточно вычеркнуть все числа кратные 2 и 5, т.е. $1011 + 202 = 1213$ множителей.

Ответ: 1213.

№2



По условию $S_{ABD} = 10 см^2$; $S_{ACD} = 9 см^2$; $S_{AED} = 6 см^2$.

$S_{ABD} = S_{ABE} + S_{AED}$, $S_{ABE} = S_{ABD} - S_{AED} = 10 см^2 - 6 см^2 = 4 см^2$.

$S_{ACD} = S_{AED} + S_{CED}$, $S_{CED} = S_{ACD} - S_{AED} = \cancel{10 см^2}\ 9 см^2 - 6 см^2 = 3 см^2$

Рассмотрим ΔAED и ΔCED:

Они имеют общую высоту DH ~~и их основания AE и EC лежат на одной прямой~~ $\Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{S_{AED}}{S_{CED}} = \frac{6}{3} = 2$; $AE = 2EC$.

Рассмотрим ΔABE и ΔBEC:

Они также имеют общую высоту (BF) ~~и их основа~~ $\Rightarrow$

$$\frac{S_{BEC}}{S_{ABE}} = \frac{CE}{EA} = \frac{1}{2}; \quad S_{ABE} = 2S_{BEC}, \quad S_{BEC} = \frac{S_{ABE}}{2} = \frac{4 см^2}{2} = 2 см^2.$$

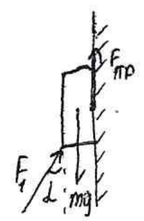
$$S_{ABCD} = S_{ABE} + S_{BEC} + S_{CED} + S_{AED} = 4 см^2 + 2 см^2 + 3 см^2 + 6 см^2 = 15 см^2$$

Ответ: $S_{ABCD} = 15 см^2$.

№7.

Найдём максимальное и минимальное значение F.
Для этого рассмотрим два случая: когда сила трения направлена вверх, и когда она направлена вниз.

1)



$F_{тр} = \mu N$, $N = F\sin(\alpha)$, 1б $F_{тр} = \mu F\sin(\alpha)$

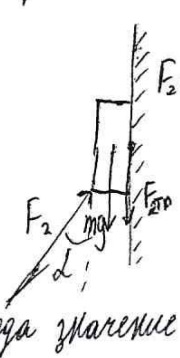
Условие равновесия: 2б

$F_{тр} + F_1\cos(\alpha) = mg$

$\mu F_1\sin(\alpha) + F_1\cos(\alpha) = mg$; $F(\mu\sin(\alpha) + \cos(\alpha)) = mg$

$$F_1 = \frac{mg}{\mu\sin(\alpha)+\cos(\alpha)} = \frac{1кг\cdot 10Н/кг}{0{,}1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{2\cdot 10Н}{0{,}1\sqrt{3}+1} = \frac{20Н\cdot(\cancel{0{,}1\sqrt{3}}\ 1-0{,}1\sqrt{3})}{1-0{,}03} = \frac{20Н\cdot(1-0{,}1\sqrt{3})}{0{,}97}$$ 1б

2)



Условие равновесия: 2б

$F_2\cos(\alpha) = F_{2тр} + mg$ 1б; $F_2\cos(\alpha) = \mu F_2\sin(\alpha) + mg$

$F_2\cos(\alpha) - \mu F_2\sin(\alpha) = mg$; $F_2(\cos(\alpha) - \mu\sin(\alpha)) = mg$

$$F_2 = \frac{mg}{\cos(\alpha)-\mu\sin(\alpha)} = \frac{1кг\cdot 10Н/кг}{\frac{1}{2}-0{,}1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{20Н}{1-0{,}1\sqrt{3}} = \frac{20Н\cdot(1+0{,}1\sqrt{3})}{1-0{,}03} = \frac{20(1+0{,}1\sqrt{3})}{0{,}97}Н$$

Отсюда значение силы F будет находится в промежутке $F_1 \le F \le F_2$. 1б

Лист 2

Продолжение работы 61/4-09-10
12:10
Кондрабова Т.П.

$$\frac{20(1-0,1\sqrt{3})}{0,97} \leq F \leq \frac{20(1+0,1\sqrt{3})}{0,97}$$

2б

Ответ: $\frac{20(1-0,1\sqrt{3})}{0,97} \leq F \leq \frac{20(1+0,1\sqrt{3})}{0,97}$.

10б

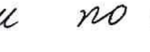
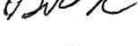
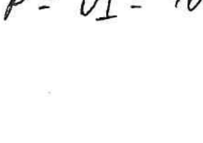
№ 8

Так как $U_0 = 30В$, а на резисторе ~~тот~~ будет ненулевое напряжение, то напряжение на лампе $U < 30$ В. Сопротивление лампы при $U = 30$ В $\frac{U}{I} = \frac{30В}{3,5А} < 10Ом = R$. Так сопротивление лампы в любом случае меньше сопротивления резистора, то напряжение на ней будет меньше напряжения на резисторе $\Rightarrow U < \frac{U_0}{2} = 15В$. Рассмотрим цепь, при токе, равном 2 А. Тогда $U = U_0 - U_R = U_0 - IR = 30В - 2А \cdot 10Ом = 10В$. Как мы видим по ВАХ лампы, при напряжении на ней 10В сила тока равна 2 А, что, собственно, у нас и получилось. Найдём мощность лампы: $P = UI = 10В \cdot 2А = 20Вт$

Ответ: $P = 20Вт$.

15б

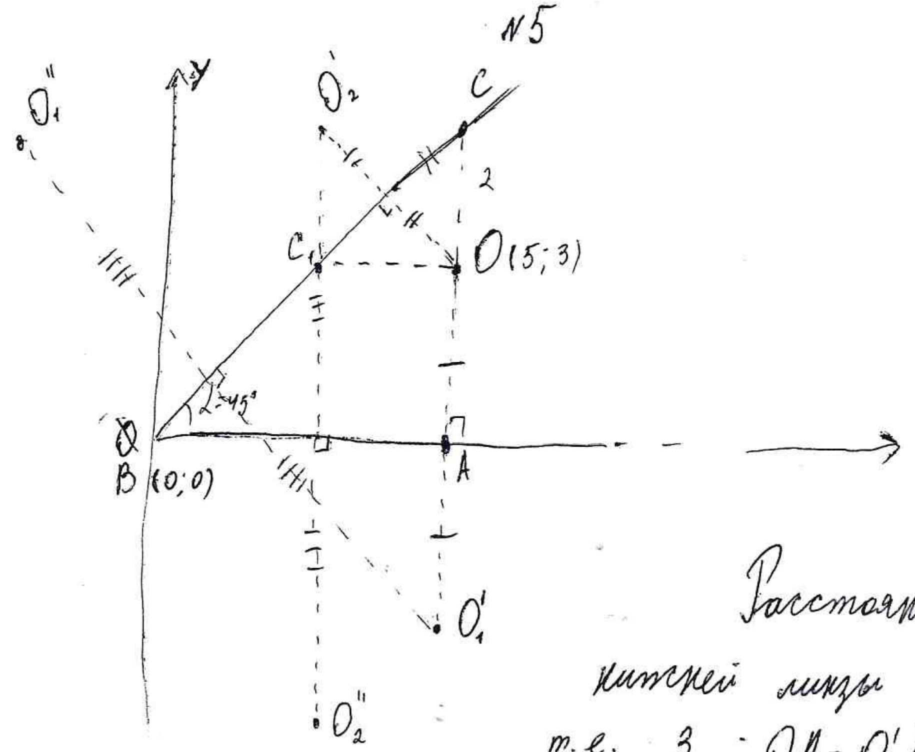
№ 4

Чтобы в прямоугольник 6×8 поместилось меньше уголков, нужно в нём оставлять пустые полосы, идущие не подряд. Самое оптимальное решение – это сделать 2 такие полосы 1×8 по краям прямоугольника, и так у нас остаётся лишь прямоугольник 4×8. Нужно ограничить его от тех полос $\Rightarrow$ стороны уголков 1×2 должны быть по краям. Удобнее всего их расположить вот так:  . „Развернём" симметрично эту конструкцию и получим прямоугольник 6×8 такого типа: 

в котором 8 уголков.

Ответ: 8

№5



Расстояние от ~~п~~ предмета до нижней линзы равно ординате точки O, т.е. 3 ; $OA = O'_1A$ $\Rightarrow$

$O_x = O'_{1x} = 5$, $O'_{1y} = O_y - 2\cdot 3 = 3-6=-3$; $O'_1(5;-3)$

Отражение предмета через наклонённое стекло будет на 2 выше предмета, а левее его тоже на 2, т.к. $\angle OAB = 90°$, $\angle\alpha = 45°$, $AB = AC$, $OC = AC - AO = 5-3=2$; OC симметрично OC_1 относительно OO'_2 . $O'_2(5-2;3+2)$, т.е. $O'_2(3;5)$.

Отражение O'_2 об нижнее зеркало будет иметь такую же абсциссу и противоположную по знаку ординату, т.к. O'_2 симметрично O''_2 относительно оси x $\Rightarrow$ $O''_2(3;-5)$ отражения O''_2 об наклоненное зеркало не будет существовать, т.к. зеркало заканчивается ~~в~~ в точке $B(0;0)$, а ~~точка~~ перпендикуляр опустится бы на зеркало в точке, имеющей ординат меньше 0. ~~O''_{1x}~~ По точной такой же причине O'_1 отразится в O''_1, а O''_1 в свою очередь больше не отразится $\Rightarrow$ предмет O имеет 4 отражения.

Ответ: 4 отражения, $O'_1(5;-3)$, $O'_2(3;5)$.

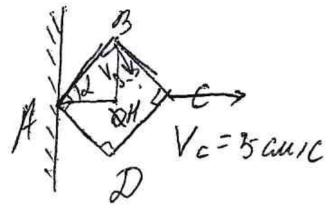
3б 3б

Лист 3 61/4-09-10

Продолжение работы

13:00

№ 6



$V_{Bx} = \frac{V_c}{2} = 2{,}5$ см/с (~~т.к.~~ проекция V_B на ось O_x будет равна половине V_c, т.к. расстояние АС будет увеличиваться в два раза больше чем АН).

В конечном итоге точка В должна совместиться с точкой Н $\Rightarrow$ её длина увеличится на АВ-АН. Пусть АВ = x, тогда $AH = AB\cos(\alpha) = x\cos(\alpha)$, где $\alpha = 45°$. АС тогда увеличится на $2(\cancel{AH} AB - AH) = 2x(1-\cos(\alpha))$. Выразим время, за которое это произойдёт:

$t = \frac{2x(1-\cos(\alpha))}{V_c}$. Точка В за это время опустится на $BH = x\sin(\alpha)$. Выразим скорость В по ординату:

$$\cancel{V_{Bx}}\ V_{By} = \frac{x\sin(\alpha)}{t} = \frac{x\sin(\alpha)\cdot V_c}{2x(1-\cos(\alpha))} = \frac{V_c\sin(\alpha)}{2(1-\cos(\alpha))} = \frac{V_c\sin(\alpha)\cdot(1+\cos(\alpha))}{2(1-\cos^2(\alpha))} = \frac{V_c\sin(\alpha)(1+\cos(\alpha))}{2\sin^2(\alpha)} =$$

$$V_{By} = \frac{V_c(1+\cos(\alpha))}{2\sin(\alpha)} = \frac{5\cdot(1+\frac{\sqrt{2}}{2})}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{5\cdot(1+\frac{\sqrt{2}}{2})}{\sqrt{2}} = 2{,}5\sqrt{2}(1+\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2{,}5(\sqrt{2}+1)$$

Теперь по теореме ~~п.~~ Пифагора найдём ~~длину~~ скорость точки В:

$$V_B = \sqrt{V_{By}^2 + V_{Bx}^2} = \sqrt{2{,}5^2(\sqrt{2}+1)^2 + 2{,}5^2} = 2{,}5\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2+1^2} = 2{,}5\sqrt{2+2\sqrt{2}+1+1} = 2{,}5\sqrt{4+2\sqrt{2}}$$

Ответ: $V_B = 2{,}5\sqrt{4+2\sqrt{2}}$.

0б

14:25

А.Бойц