и т. п. и

· корни уравнения связаны ~~друг с другом~~ со свободным членом и коэффициентом при x по теореме Виета.

$$x_1 \cdot x_2 = c$$

$$x_1 + x_2 = -b$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$\begin{cases} \sqrt{b^2 - 4ac} \in Z \\ \sqrt{b^2 - 4ac} \geqslant 0 \end{cases}$$

← зачем?

? $\Rightarrow b^2 - 4ac \geqslant 0$

$\sqrt{x} > 0$ всегда. (при $x > 0$)

Персональный идентификатор участника* 224695

Шифр** 27-11-15

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Задание	1	2	3	4	5	6	Всего
Баллы							

Вариант 1

№6 (продолжение).

$\frac{CD}{AB} = 4 \Rightarrow CD = 4AB$

Заметим, что CD - размер солнечного зайчика (по рисунку).
Если мы будем двигать AB вправо, то подобные треугольники от этого не пропадут, т.к. ~~AB//~~ HB // H'D всегда, а значит равенство $CD = 4AB$ работает для нас всегда. Но т.к. $AB = const$, то и $CD = const$, а значит размеры солнечного зайчика не изменятся, т.е.

$\frac{L_2}{L_1} = 1$, где L_2 - размеры солнечного зайчика в конце движения зеркала
L_1 - размеры солнечного зайчика в начале движение

Ответ: $\frac{L_2}{L_1} = 1$, т.е. размеры не изменятся. 15

№4 $a^2 + 20a + 22 \longrightarrow a^2 + 202a + 2$

Целые корни будут тогда, когда корень из дискриминанта будет целым числом, ~~ат~~ а также разность коэффициента при x и корня квадратного из дискриминанта будет целым числом.

* вносится участником после регистрации на сайте https://zv.susu.ru, в отсутствии персонального идентификатора участника – работа будет аннулирована
** вносится организатором олимпиады

0,5

см. на обороте

i) если $\sin x = -1$, $\sin y = 0$, то $\cos x = 0$, $\cos y = 1$

$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$ $\quad y = \pi k, k \in Z$ $\quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ $\quad y = 2\pi k, k \in Z$

Общими решениями для x и y будут:

$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \\ y = 2\pi n, n \in Z \end{cases}$ – третье решение системы,

Ответ: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \\ y = 2\pi n, n \in Z \end{cases}$, $\begin{cases} x = 2\pi k, k \in Z \\ y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \end{cases}$,

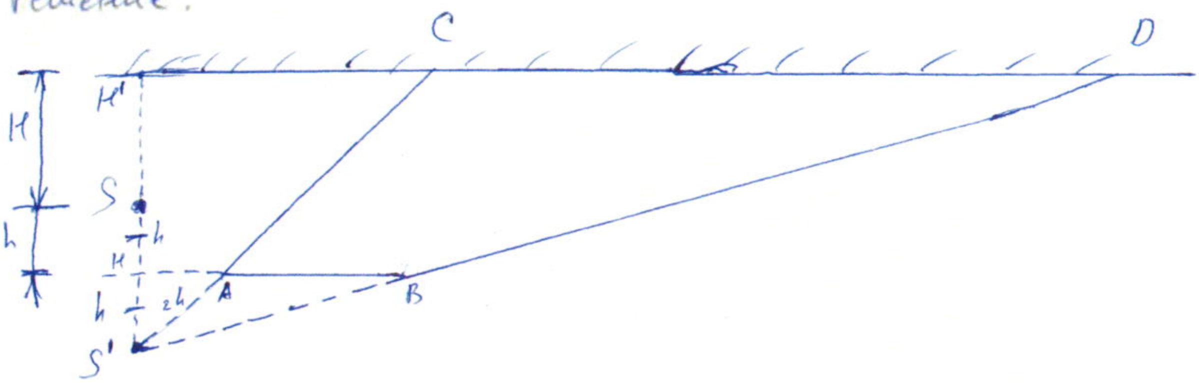
$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \\ y = 2\pi n, n \in Z \end{cases}$.

№6.

Дано:
$H = 2$ м
$h = 1$ м
$v = 2$ м/с
$SA = 2h$
$t = 5$ с.

$\frac{L_2}{L_1}$ – ?

Решение.



Нарисуем источник света S' в зазеркалье.

Рассмотрим $\Delta S'H'C$.

$\Delta S'HA \sim \Delta S'H'C$, т.к. $AH \parallel CH'$

Коэффициент подобия $k = \frac{H+2h}{h}$; $k = \frac{2+2}{1} = \cancel{2}\ 4$

Рассмотрим $\Delta S'H'D$.

$\Delta S'H'D \sim \Delta S'HB$, т.к. $HB \parallel H'D$, причём коэффициент подобия такой же $k = 4$.

В подобных треугольниках подобны не только стороны, а любые соответственные отрезки $\Rightarrow CD \sim AB$, причём $\frac{CD}{AB} = k$, т.е. $\frac{CD}{AB} = 4$,

продолжение на другом листе

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Персональный идентификатор участника* 224695

Шифр** 24-11-15

Задание	1	2	3	4	5	6	Всего
Баллы							

Вариант 1

№2 (продолжение).

б) $\cos x = 1$, $\cos y = 0$

$x = 2\pi k, k \in Z$. $y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

Зная, что $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$, то из всех полученных решений отдельных уравнений решением системы будет то, что удовлетворяет основному тригонометрическому тождеству.

1) если $\sin x = 1$, $\sin y = 0$, то $\cos x = 0$, $\cos y = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$ $y = \pi k, k \in Z$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ $y = 2\pi k, k \in Z$

Общими решениями для x и y будут:

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \\ y = 2\pi n, n \in Z \end{array}\right.$$ — первое решение системы.

2) если $\sin x = 0$, $\sin y = 1$, то $\cos x = 1$, $\cos y = 0$

$x = \pi k, k \in Z$ $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$ $x = 2\pi k, k \in Z$ $y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

Общими решениями для x и y будут:

13б

$$\left[\begin{array}{l} x = 2\pi k, k \in Z \\ y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \end{array}\right.$$ — второе решение системы.

* вносится участником после регистрации на сайте https://zv.susu.ru, в отсутствии персонального идентификатора участника – работа будет аннулирована

** вносится организатором олимпиады

→ см. на обороте

$V_{MABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h \Rightarrow \cancel{\frac{V_{AA_1B_1C_1}}{AB}} = V_{A_1AB_1C_1} = V_{MABC} \cdot \frac{1}{3k^2}$ 27-11-15

$$V_{A_1AB_1C_1} = \frac{324}{3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\overset{36}{\cancel{324}} \cdot 4}{3 \cdot \cancel{9}_1} = 48$$

$$V_{MAB_1C_1} = V_{MA_1B_1C_1} + V_{A_1AB_1C_1}$$

$$V_{MAB_1C_1} = 96 + 48 = 144.$$

Ответ: $V_{MAB_1C_1} = 144$.

№2. $\begin{cases} \sin^4 x + \sin^5 y = 1 \\ \cos^3 x + \cos^4 y = 1 \end{cases}$

Рассмотрим первое уравнение.

$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sin^4 x \leq 1$

$-1 \leq \sin y \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \sin^5 y \leq 1$

Уравнение выполняется в случаях:

а) $\sin x = 1$, $\sin y = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$ $y = \pi k, k \in Z$

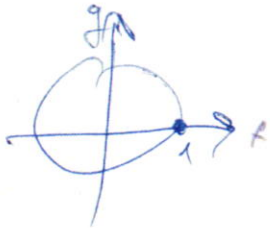
б) $\sin x = 0$, $\sin y = 1$

$x = \pi k, k \in Z$. $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

в) $\sin x = -1$, $\sin y = 0$

$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$, $y = \pi k, k \in Z$

Рассмотрим второе уравнение.



$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \cos^3 x \leq 1$

$-1 \leq \cos y \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \cos^4 y \leq 1$

Уравнение выполняется в случаях:

а) $\cos x = 0$, $\cos y = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ $y = 2\pi k, k \in Z$

продолжение на другом листе

Персональный идентификатор участника* 224695

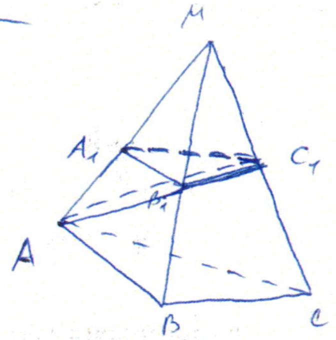
Шифр** 27-11-15

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Задание	1	2	3	4	5	6	Всего
Баллы							

Вариант 1

№3.



Дано: MABC – пирамида
$(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$
$V_{MABC} = 324$
$V_{MA_1B_1C_1} = 96$
Найти: $V_{MAB_1C_1}$

Решение.

1) Т.к. $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1) \Rightarrow MA_1B_1C_1 \sim MABC$, т.к. их рёбра подобны.

2) Найдём коэффициент подобия

$\frac{V_{MABC}}{V_{MA_1B_1C_1}} = k^3 \Rightarrow k = \sqrt[3]{\frac{V_{MABC}}{V_{MA_1B_1C_1}}}$; $k = \sqrt[3]{\frac{324}{96}} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^3} = 1,5$

3) Заметим, что $V_{MAB_1C_1} = V_{MA_1B_1C_1} + V_{A_1AB_1C_1}$

Рассмотрим усечённую пирамиду $ABCC_1B_1A_1$.

Пусть высота пирамиды MABC равна h, тогда высота пирамиды $MA_1B_1C_1$ равна $\frac{h}{1,5}$, тогда высота усечённой пирамиды $H = h - \frac{h}{1,5} = \frac{0,5h}{1,5} = \frac{h}{3}$

$V_{A_1AB_1C_1} = \frac{1}{3} \cdot S_{A_1B_1C_1} \cdot H$

+ 135

т.к. $k = 1,5$, то $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2 \Rightarrow S_{A_1B_1C_1} = \frac{S_{ABC}}{k^2}$

$V_{A_1AB_1C_1} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot h \cdot \frac{1}{3k^2}$ $\left(H = \frac{h}{3};\ S_{A_1B_1C_1} = \frac{S_{ABC}}{k^2}\right)$

* вносится участником после регистрации на сайте https://zv.susu.ru, в отсутствии персонального идентификатора участника – работа будет аннулирована

** вносится организатором олимпиады

→ см на обороте

27-11-15

$Q = \frac{U_y}{R} \cdot 4t_0$

Приравняем ~~у~~ правые части уравнений.

$\frac{150 t_0}{R} = \frac{U_y^2}{R} \cdot 4t_0 \Rightarrow 150 = 4U_y^2 \Rightarrow U_y^2 = \frac{150}{4} \Rightarrow U_y^2 = 37{,}5 \Rightarrow U_y = \sqrt{37{,}5}$

$U_y \approx 6{,}12$ В

Ответ: $U_y \approx 6{,}12$ В.

≠15

№8. Дано:

$\nu = 2$ моль

$M_{O_2} = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$M_O = 16 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$T_1 = 300$ K

$\eta = 0{,}4$

$V_2 = 3V_1$

$A' - ?$

Решение.

Найдём массу всего вещества в сосуде.

$\nu = \frac{m}{M} \Rightarrow m = \nu \cdot M$

$m = \nu \cdot M_{O_2} \Rightarrow m = 2 \cdot 32 \cdot 10^{-3} = 64 \cdot 10^{-3}$ (кг)

Из всей этой массы 40% распалось на атомарный кислород:

$m_1 = m\eta \Rightarrow m_1 = 64 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}4 = 25{,}6 \cdot 10^{-3}$ (кг) – атомарного кислорода.

Тогда молекулярного кислорода осталось $m_2 = m - m_1 \Rightarrow m_2 = (64 - 25{,}6) \cdot 10^{-3} = 38{,}4 \cdot 10^{-3}$ (кг).

Найдём кол-во в-ва, которое стало в сосуде.

$\nu_1 = \frac{m_1}{M_O} \Rightarrow \nu_1 = \frac{25{,}6 \cdot 10^{-3}}{16 \cdot 10^{-3}} = 1{,}6$ (моль)

$\nu_2 = \frac{m_2}{M_{O_2}} \Rightarrow \nu_2 = \frac{38{,}4 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} = 1{,}2$ (моль) $\Rightarrow \nu_1 + \nu_2 = 2{,}8$ (моль)

Т.к. стенки сосуда гладкие, а поршень невесом, то давление в системе остаётся неизменным. Запишем уравнения Менделеева–Клапейрона для начала и конца процесса.

$pV_1 = \nu R T_1 \qquad pV_2 = (\nu_1 + \nu_2) R T_2 \Rightarrow V_1 = \frac{\nu R T_1}{p}; \; V_2 = \frac{(\nu_1+\nu_2) R T_2}{p}$

Т.к. $V_2 = 3V_1$, то $3pV_1 = (\nu_1 + \nu_2) R T_2$

R – универсальная газовая пост.

Найдём T_2.

$3\nu R T_1 = (\nu_1 + \nu_2) R T_2 \Rightarrow T_2 = \frac{3\nu T_1}{\nu_1 + \nu_2} \Rightarrow T_2 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 300}{2{,}8} \approx 643$ (K) ≠ 10б

$A' = p\Delta V = p(V_2 - V_1) = p\left(\frac{(\nu_1+\nu_2) R T_2}{p} - \frac{\nu R T_1}{p}\right) = (\nu_1+\nu_2) R T_2 - \nu R T_1 = R(T_2(\nu_1+\nu_2) - T_1\nu)$

$A' = 8{,}31(643 \cdot 2{,}8 - 300 \cdot 2) \approx 9975$ (Дж)

Ответ: $A' \approx 9975$ Дж

Задание	1	2	3	4	5	6	Всего
Баллы							

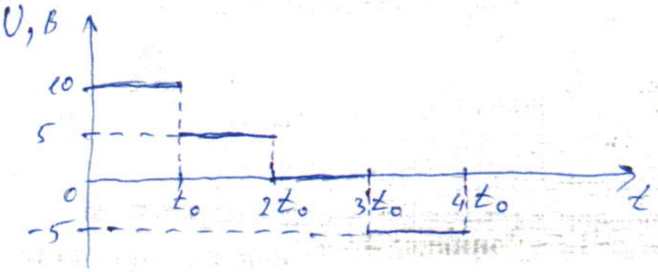
Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Персональный идентификатор участника* 224695

Шифр** 27-11-15

Вариант 1

17. Дано: Найти: $U_д$

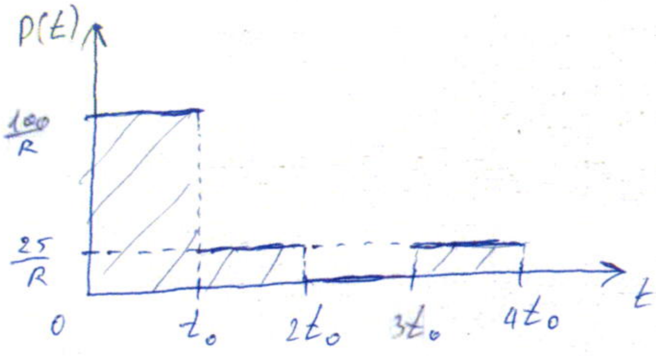


Решение.

Действующим напряжением переменного тока называется такое напряжение постоянного тока, при котором в цепи за одно и то же время выделяется такое же кол-во теплоты, что и в цепи с данным переменным током.

Для цепи с переменным током: $P(t) = I(t)\cdot U(t) = \dfrac{U^2(t)}{R}$

~~И~~ построим график зависимости мощности от времени.



$P(t_0) = \dfrac{100}{R}$

$P(2t_0) = \dfrac{25}{R}$

$P(3t_0) = 0$

$P(4t_0) = \dfrac{25}{R}$

Заштрихованной под графиком площадью является теплота, выделенная за цикл в цепи. Найдём её.

$$Q = \frac{100}{R}\cdot t_0 + \frac{25}{R}\cdot t_0 + 0 + \frac{25}{R}\cdot t_0 = \frac{150\,t_0}{R}$$

Можем сопоставить эту теплоту с теплотой, выделенной в цепи пост. тока,

* вносится участником после регистрации на сайте https://zv.susu.ru, в отсутствии персонального идентификатора участника – работа будет аннулирована

** вносится организатором олимпиады

⟶ см. на обороте

27-11-15

$b^2 > \left(2a+\frac{c}{2}\right)^2 \geqslant 4ac \Rightarrow b^2 > 4ac$

Видно, что во всех случаях $b^2>4ac$.

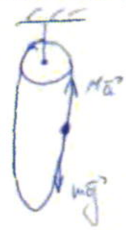
ч.т.д.

15.

Дано:
$M=5$ кг
$m=30$ кг
$t=2$ с.

$P-?$

Решение.



Обезьяна, карабкаясь по верёвке, действует на неё с некоторой силой, которая будет сообщать верёвке ускорение: $F=Ma$.

По III з-ну Ньютона верёвка также будет действовать с силой на обезьяну, причём сила будет точно такой же ($F=Ma$) и она будет уравновешивать силу тяжести, действующую на обезьяну (т.к. она удерживается на одной высоте).

Запишем II з-н Ньютона для обезьяны.

$Ma-mg=0 \Rightarrow Ma=mg \Rightarrow a=\frac{mg}{M}$ – ускорение, с которым должна двигаться обезьяна.

Т.к. изначально скорость обезьяны была нулевой, то

$V(t)=at$

$P(t)=F\cdot\frac{dS}{dt}$

Т.к. движение равноускоренное, то $S=\frac{at^2}{2}$

$\frac{dS}{dt}=\left(\frac{at^2}{2}\right)'_t=\frac{2at}{2}=at$

$P(t)=F\cdot at$

Т.к. обезьяна совершает работу по удерживанию самой себя на одной высоте, то

$F=mg$

$P(t)=mgat=mg\cdot\frac{mg}{M}\cdot t=\frac{(mg)^2t}{M}$

$P(2)=\frac{300^2\cdot 2}{5}=36\,000$ (Вт)

Ответ: $P=36$ кВт. 10б

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Персональный идентификатор участника* 224695

Шифр** 27-11-15

Задание	1	2	3	4	5	6	Всего
Баллы	10	13	13	0			

без изменений

Вариант 1

физика: без изменений

№1. $2b > 4a+c > 0$, док-ть $b^2 > 4ac$.

$4a+c > 0$ – такое возможно в 3 случаях:

1) $a>0$, $c<0$ (не всегда, но возможно)

2) $a<0$, $c>0$ (не всегда, но возможно)

3) $a>0$, $c>0$

при $a<0$, $c<0$ сумма отрицательна.

Т.к. $2b>0$ и $4a+c>0$, то можем возвести их в квадрат.

$2b > 4a+c \;|\,{}^{\wedge}2$

$4b^2 > 16a^2+8ac+c^2 \;|\cdot\frac{1}{4}$

$b^2 > 4a^2+2ac+\frac{c^2}{4} \Rightarrow b^2 > \left(2a+\frac{c}{2}\right)^2$

Сравним $\left(2a+\frac{c}{2}\right)^2$ и $4ac$.

Рассмотрим 3 случая:

1) $a>0$, $c<0$.

т.к. $\left(2a+\frac{c}{2}\right)^2$ всегда больше 0, а $c<0$ (значит $4ac<0$), то $\left(2a+\frac{c}{2}\right)^2 > 4ac$

$b^2 > \left(2a+\frac{c}{2}\right)^2 > 4ac \Rightarrow b^2 > 4ac$

2) $a<0$, $c>0$

из-за отрицательного множителя $4ac$ снова меньше 0 $\Rightarrow \left(2a+\frac{c}{2}\right)^2 > 4ac$

$b^2 > \left(2a+\frac{c}{2}\right)^2 > 4ac \Rightarrow b^2 > 4ac$.

3) $a>0$, $c>0$.

10б

$\left(2a+\frac{c}{2}\right)^2 \vee 4ac \;|\sqrt[2]{\ }$ (т.к. $4ac>0$)

$2a+\frac{c}{2} \vee \sqrt{4ac}$

$\frac{4a+c}{2} \vee \sqrt{4ac} \to$ по неравенству Коши $\frac{4a+c}{2} \geq \sqrt{4ac} \Rightarrow \left(2a+\frac{c}{2}\right)^2 \geq 4ac$

* вносится участником после регистрации на сайте https://zv.susu.ru, в отсутствии персонального идентификатора участника – работа будет аннулирована

** вносится организатором олимпиады

→ см. на обороте