Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 021108

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	10	13	13	14	6	15	0	10	81

без изм.

без изм.

Вариант 2

Задача 1. $3b > 9a + c > 0$. $b > 3a + \frac{c}{3} > 0$.

Пусть $b = 3a + \frac{c}{3} + d$, где $d > 0$, тогда.

$b^2 = 9a^2 + \frac{c^2}{9} + 2ac + d^2 + 6ad + \frac{2cd}{3}$. Заметим, что $9a^2 + \frac{c^2}{9} \geq 2ac$ – неравенство Коши, тогда.

$9a^2 + \frac{c^2}{9} + 2ac + d^2 + 6ad + \frac{2cd}{3} \geq 4ac + d^2 + 6ad + \frac{2cd}{3} > 4ac$ т.к. $d > 0$ и ~~$6a > \frac{2c}{3}$ т.к. $9a + c > 0$ и $9a >$~~ $\frac{2}{3}d(9a + c) > 0$.

Тогда и $b^2 \geq 4ac$. $b^2 > 4ac$ ч.т.д.

+

Задача 2.

Сложим уравнения, получим:

$\sin^3 x + \cos^3 x + \sin^4 y + \cos^5 y = 2$. $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ $1 = \sin^2 y + \cos^2 y$ – основное тригонометрическое тождество. Тогда.

$\sin^2 x(\sin x - 1) + \cos^2 x(\cos x - 1) + \sin^2 y(\sin^2 y - 1) + \cos^2 y(\cos^3 y - 1) = 0$.

Заметим, что $\sin x - 1 \leq 0$, а $\sin^2 x \geq 0$. Тогда $\sin^2 x(\sin x - 1) \leq 0$.
$\cos x - 1 \leq 0$ $\cos^2 x \geq 0$ $\cos^2 x(\cos x - 1) \leq 0$ $\sin^2 y - 1 \leq 0$ $\sin^2 y \geq 0$ $\sin^2 y(\sin^2 y - 1) \leq 0$.
$\cos^3 y - 1 \leq 0$ $\cos^2 y \geq 0$ $\cos^2 y(\cos^3 y - 1) \leq 0$. Все слагаемые меньше или равны нулю, а их сумма ноль. Тогда каждое слагаемое равно нулю. Получаем из 1 слагаемого $\left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x = 1\end{array}\right.$, из 2 $\left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x = 1\end{array}\right.$, из 3 $\left[\begin{array}{l}\sin y = 0\\ \sin y = \pm 1\end{array}\right.$, из 4 $\left[\begin{array}{l}\cos y = 0\\ \cos y = 1\end{array}\right.$. ~~Получаем, что решением системы является. $\sin x = 1$ $\cos x = 0$ $\sin y$~~ Т.к. синус и косинус одного угла одновременно не могут равняться 0 и 1 тогда.

$\left[\begin{array}{ll}\sin x = 0 & \cos x = 1\\ \cos x = 0 & \sin x = 1\end{array}\right.$ и $\left[\begin{array}{ll}\sin y = 0 & \cos y = 1\\ \sin y = 1 & \cos y = 0\\ \sin y = -1 & \cos y = 0\end{array}\right.$ См. продолжение на стр.2.

Задача 2 Продолжение.

Из второго уравнения следует, что если $\cos x = 0$, то $\cos y = 1$ и если $\cos x = 1$ то $\cos y = 0$. Тогда получаем

$$\left[\begin{array}{llll} \cos x = 0 & \sin x = 1 & \cos y = 1 & \sin y = 0. \\ \cos x = 1 & \sin x = 0 & \cos y = 0 & \sin y = -1 \\ \cos x = 1 & \sin x = 0 & \cos y = 0 & \sin y = 1 \end{array}\right.$$

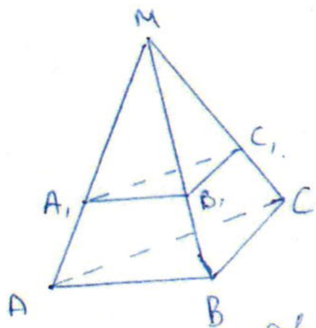
Тогда получаем следующие значения x и y.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \\ y = 2\pi n, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z} \\ \begin{cases} x = 2\pi m; \\ y = \frac{\pi}{2} + \pi l \end{cases} \quad m, l \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

+

Ответ. $(x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ y = 2\pi n)$; $(x = 2\pi m;\ y = \frac{\pi}{2} + \pi l)$; $k, n, m, l \in \mathbb{Z}$

Задача 3.



$(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$ $(A_1B_1C_1)$ пересекает (ABM) в прямой A_1B_1 (ABC) пересекает (ABM) в прямой AB Тогда по теореме о пересечении двух параллельных плоскостей третьей $AB \parallel A_1B_1$. Пусть $\frac{MB}{MB_1} = k$. $\triangle MA_1B_1 \sim \triangle MAB$ по двум соответственным углам между AB и A_1B_1 и секущими MA и MB $AB \parallel A_1B_1$. Тогда $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{MB}{MB_1} = k$. Аналогично рассмотрим B_1C_1 и BC. $B_1C_1 \parallel BC$ т.к. $(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$ $(A_1B_1C_1)$ пересекает (MBC) в прямой B_1C_1 (ABC) пересекает (MBC) в прямой BC тогда по теореме о пересечении двух параллельных плоскостей третьей $B_1C_1 \parallel BC$ Тогда $\triangle MB_1C_1 \sim \triangle MBC$ т.к. $\angle MB_1C_1 = \angle MBC$ $B_1C_1 \parallel BC$ MB - секущая $\angle M$ - общий. Тогда $\frac{MB_1}{MB} = \frac{MC_1}{MC} = \frac{B_1C}{BC} = k$. Аналогично $\frac{A_1C_1}{AC} = k$. Рассмотрим треугольники: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ с коэффициентом k. Тогда $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle A_1B_1C_1} = k^2$.

см. продолжение на стр-3

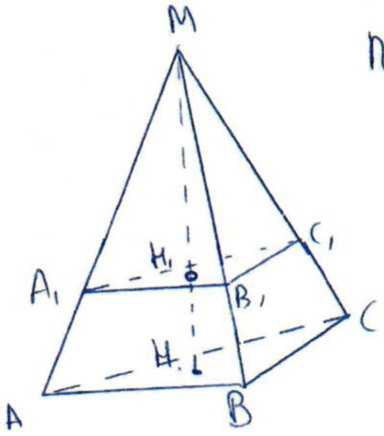
Получим, что $\frac{MA}{MA_1} = \frac{MB}{MB_1} = \frac{MC}{MC_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$.

Бланк ответов №2

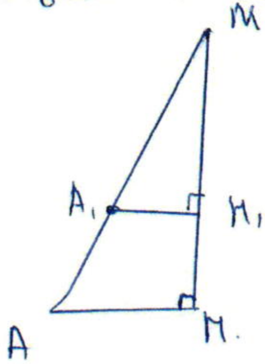
Шифр 021108

Вариант 2.

Задача 3 Продолжение. Проведем высоту MH к (ABC).
MH пересекает $(A_1B_1C_1)$ в точке H_1,



Перейдем в плоскость (MAH).



$MH \perp (ABC) \Rightarrow MH_1 \perp (A_1B_1C_1)$

Тогда $\triangle AMH \sim \triangle A_1MH_1$

$$\frac{MH}{MH_1} = \frac{AM}{A_1M} = k.$$

По формуле ~~площади~~ объема пирамиды $V_{MABC} = \frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot MH$.
$V_{MA_1B_1C_1} = \frac{1}{3}\cdot S_{\triangle A_1B_1C_1}\cdot MH_1$

$$\frac{V_{MABC}}{V_{MA_1B_1C_1}} = \frac{S_{ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}}\cdot\frac{MH}{MH_1} = k^3 = \frac{375}{81} = \frac{5^3}{3^3}$$

Тогда $k = \frac{5}{3}$. Найдем объем пирамиды MAB_1C_1.
Заметим, что $V_{MAB_1C_1} = V_{MA_1B_1C_1} + V_{AA_1B_1C_1}$.

$V_{MAB_1C_1} = \frac{1}{3}\cdot S_{\triangle A_1B_1C_1}\cdot MH_1$, $V_{AA_1B_1C_1} = \frac{1}{3}\cdot S_{\triangle A_1B_1C_1}\cdot H_1H$.

Тогда $V_{MAB_1C_1} = \frac{1}{3}S_{\triangle A_1B_1C_1}\cdot(MH_1 + H_1H) = \frac{1}{3}S_{\triangle A_1B_1C_1}\cdot MH$.

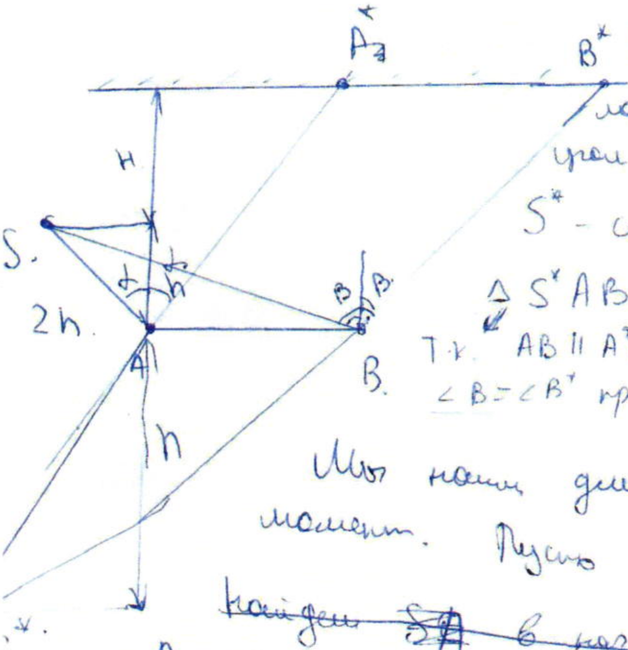
$$\frac{V_{MAB_1C_1}}{V_{MABC}} = \frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}}\cdot\frac{MH}{MH}\cdot\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}} \Rightarrow V_{MAB_1C_1} = V_{MABC}\cdot\frac{1}{k^2} =$$

$$= 375\cdot\frac{3^2}{5^2} = 135.$$

Ответ 135.

+

Задача 6.



Рассмотрим длину зайчика в начальный момент времени. По закону прямолинейного угол падения равен углу отражения.

S^* - симметрична S относительно AB

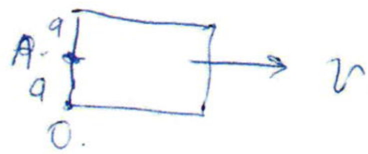
$\Delta S^*AB \sim \Delta S^*A^*B^*$ Получаем, $\frac{A^*B^*}{AB} = \frac{h+h+H}{h}$.

т.к. $AB \parallel A^*B^*$ $\angle S^*$-общий

$\angle B = \angle B^*$ при $AB \parallel A^*B^*$

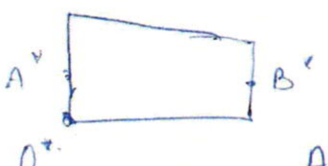
$A^*B^* = AB \cdot 3{,}5$.

Мы нашли длину пятна, найдем его ширину в нач. момент. Пусть ширина зеркала 2a.



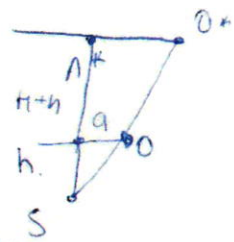
~~Найдем SA в нач. момент времени.~~

~~Нач~~ Солнечный зайчик изначально был таким



Найдем A^*O^*. Из подобия.

$A^*O^* = a \cdot 3{,}5$

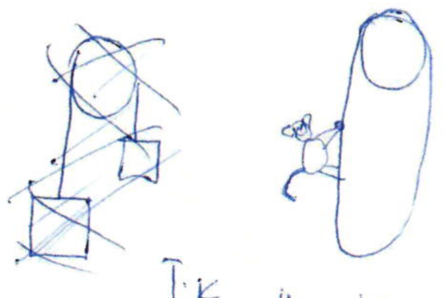


Заметим, что A^*B^* зависит только от расстояний H и h. Они не меняются. Значит и размеры пятна не будут меняться.

Ответ не изменились.

x

Задача 5.



Пусть обезьяна тянет веревку с силой T тогда $T - mg = 0$. т.к. относительно ИСО обезьяна не движется. Тогда $T = Ma$.

т.к у каждой точки веревки ускорение a.

Получаем $mg = Ma$ отсюда $a = 2{,}5\ м/с^2$ Относительно веревки обезьяна движется с ускорением $a = 2{,}5\ м/с^2$. Через 3 секунды у нее будет скорость $V = at = 7{,}5\ м/с$. Мощность

$P = FV = mg \cdot V = 20\ g \cdot 7{,}5 = 150\ g = 1500$ Ватт

Ответ 1500 Ватт.

6 б.

Бланк ответов №2

Шифр 021108

Вариант 2.

Задача 7. Действующее напряжение в і момент времени это модуль напряжения т.к. При этом напряжении развивается такая же мощность как и при модуле напряжения, только при отрицательном напряжении ток движется в другую сторону. Тогда найдем среднее значение напряжения среди модулей.

За отрезок от 0 до t_0 — 50 В, $t_0 - 2t_0$ — 100 В, $2t_0 - 3t_0$ — 50 В. $3t_0 - 4t_0$ — 50 В. Сложим и найдем среднее. Получим. $\frac{250}{4} =$ $= 62{,}5$ В. Т.к. процессы цикличные, то в среднем напряжение 62.5 В тогда и действующее напряжение 62.5 В.

Ответ 62,5 В

0б

Задача 8

Заметим, что работа газа физическая величина. Азот закрыт невесомым поршнем, значит в течении процесса (квазистатического давление не менялось. Объем газа увеличился в 2 раза, значит. $A = P_0 \int dV = P(2V_0 - V_0) = PV_0$. По з-ну Менделеева-Клапейрона, в начальный момент времени. $P_0 V_0 = \nu R T_0 = 4 \cdot 8{,}31 \cdot 350 = 11634$ Дж.

Тогда $A = P_0 V_0 = 11634$ Дж.

Ответ 11634 Дж.

Дополнительно можно найти температуру в конце процесса.

$P_0 V_0 = \nu R T_0$.

$P_0 \cdot 2V_0 = (0{,}6 \cdot 2 + 0{,}4) \nu R T_x = 1{,}6 \nu R T_x$, тогда $T_x = \frac{2}{1{,}6} T_0 = \frac{5}{4} T_0 =$

$= 437{,}5$ K.

+

Задача 4.

Заметим что у трёхчлена $x^2-(a+1)x+a=0$. Всегда есть корни при целом a. Корни целые ведь $x^2-(a+1)x+a=(x-a)(x-1)$. Тогда если доказать, что – коэф при x на один больше ~~коэф.~~ свободного члена то задача решена. Заметим, что изначально коэф b при x $|b|<c$, c – свободный член. А в конце $|-202|>2$. т.к. $|-20|<22$. Получается что точно найдется момент когда. $|b|=\cancel{c+1}$ $c+1$. Потому что если изобразить график. Значений $|b|$ и c относительно количества ходов мы увидим. Что изначально $|b|<c$, а в конце $|b|>c$, значит график $|b|$ пересекает c. Значит будет такой момент, когда $|b|$ будет на 1 больше c. К примеру рассмотрим момент после пересечения. Если в следующий момент c – увеличится, то будет еще одно пересечение. Если $|b|$ увеличится, то как раз это момент когда $|b|=c+1$.

(+)