Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Шифр 10100-11-01

(1)

№1.

$2b > 4a + c > 0$ $\qquad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ – неравенство Коши.

$\frac{4a+c}{2} \geq \sqrt{4ac}$

$\left(\frac{4a+c}{2}\right)^2 \geq 4ac$

$\frac{(4a+c)^2}{4} \geq 4ac$, по условию $2b > 4a+c$

1	2	3	4	5	6	7	8
10	13	13	2	10	15	10	15

$\Sigma = 88$

$(2b)^2 > (4a+c)^2 \geq 16ac$

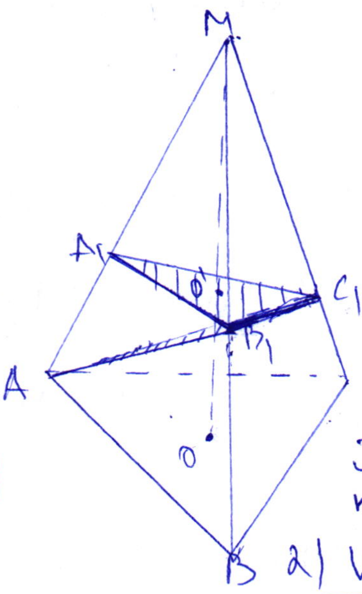
$4b^2 > 16ac \mid :4$

$\underline{b^2 > 4ac}$

+

ч.т.д.

№3.



Дано: $MABC$ – пирамида

$(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$

$V_{MABC} = 324$,

$V_{MA_1B_1C_1} = 96$

Найти: $V_{MAB_1C_1}$ – ?

Решение: 1) $V_{MAB_1C_1} = V_{MA_1B_1C_1} + V_{AA_1B_1C_1}$

Плоскость $A_1B_1C_1$ отсекает от пирамиды $MABC$ подобную ей пирамиду $MA_1B_1C_1$.

2) $\frac{V_{MABC}}{V_{MA_1B_1C_1}} = \frac{324}{96} = \frac{27}{8} = k^3 \Rightarrow k = \frac{3}{2}$.

+

3) Обозначим $h = MO_1$ – высота $MA_1B_1C_1$, тогда $OO^1 = \frac{h}{2}$ – высота $AA_1B_1C_1$.

$V_{AA_1B_1C_1} = \frac{1}{3} \cdot S_{A_1B_1C_1} \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{2} V_{MA_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot 96 = 48$.

4) $V_{MA_1B_1C_1} = 96 + 48 = \underline{144}$.

Ответ: 144.

на обратной стороне ~~след. стр.~~

№4.

$x^2+20x+22=0$

I случай: $x^2+21x+22=0$

II случай: $x^2+21x+22=0$

III случай: $x^2+23x+22=0$

$x_1=-22,\ x_2=-1$

и т.д.

Среди полученных квадратных трёхчленов есть такой, у которого целые корни.

—

№2.

$$\begin{cases} \sin^4 x+\sin^5 y=1 \\ \cos^3 x+\cos^7 y=1 \end{cases}$$

Решение:

Сложим левые и правые части равенств

$(\sin^4 x+\cos^3 x)+(\sin^5 y+\cos^7 y)=2\ (*)$

1) $-1\leq \cos x\leq 1 \Rightarrow \cos^2 x\cdot(1-\cos x)\geq 0 \Rightarrow \cos^3 x\leq \cos^2 x$, причём равенство только при $\cos x=0$ или $\cos x=1$

$-1\leq \sin x\leq 1 \Rightarrow \sin^2 x(1-\sin^2 x)\geq 0 \Rightarrow \sin^4 x\leq \sin^2 x$, причём равенство только при $\sin x=0$ или $\sin x=1$ или $\sin x=-1$.

Тогда $\sin^4 x+\cos^3 x\leq \cos^2 x+\sin^2 x=1$, равенство только при $\begin{cases}\cos x=0\\ \sin x=\pm1\end{cases}$ или $\begin{cases}\cos x=1\\ \sin x=0\end{cases}$, то есть $x=2\pi k$ или $x=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$

2) $-1\leq \cos y\leq 1 \Rightarrow \cos^2 y\,(1-\cos^5 y)\geq 0 \Rightarrow \cos^5 y\leq \sin^2 y$, равенство при $\sin y=0$ или $\sin y=1$, тогда $\cos^7 y+\sin^5 y\leq \cos^2 y+\sin^2 y=1$, и равенство только при $\begin{cases}\cos y=0\\ \sin y=1\end{cases}$ или $\begin{cases}\cos y=1\\ \sin y=0\end{cases}$, то есть $y=2\pi n$ или $y=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$

3) $\sin^4 x+\cos^3 x\leq 1$ и $\sin^5 y+\cos^7 y=1 \Rightarrow$ равенство $(*)$ возможно в случае $\begin{cases}\sin^4 x+\cos^3 x=1\\ \sin^5 y+\cos^7 y=1\end{cases}$ и по условию задачи $\begin{cases}\sin^4 x+\sin^5 y=1\\ \cos^3 x+\cos^7 y=1\end{cases}$

а) $x=2\pi k$, тогда $\sin x=0$, $\cos x=1 \Rightarrow \sin y=1$ и $\cos y=0 \Rightarrow$ есть решение $x=2\pi k$

$y=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $k,n\in Z$.

см. след. лист.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Шифр Ю100-11-01

(2)

Продолжение №2...

б) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, тогда $\sin x=1$, $\cos x=1 \Rightarrow \sin y=0$ и $\cos y=1$ есть решение $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $y=2\pi n$, $k,n\in Z$

в) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, тогда $\sin x=-1$, $\cos x=0 \Rightarrow \sin y=0$ и $\cos y=1$, есть решение $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $y=2\pi n$, $n,k\in Z$.

Ответ: а) $x=2\pi k$, $y=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $k,n\in Z$. б) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $y=2\pi n$, $k,n\in Z$

в) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $y=2\pi n$, $n,k\in Z$.

№5.

Дано:
$M=5$ кг
$m=30$ кг
$t=2$ с
$P-?$

Решение:
По усл. задачи, обезьяна развивает такую мощность P, что сама остаётся на неизменной высоте. Это означает, что на обезьяну действует направленная вверх сила $\vec{F}$, которая компенсирует силу тяжести:

$F=mg$, (1); где $g=10$ м/с².

По третьему закону Ньютона такая же по величине сила действует на тот сегмент верёвки, который находится в руках обезьяны. Эта сила совершает работу и изменяет $\vec{E}_к$ элементов верёвки. По закону сохран. энергии $dA=dE_к$ (2)

см. на обратной стороне

Здесь dA - работа силы F за время dt. Она равна $dA = P \cdot dt$ (3), где P - мощность силы F. Величина dE_k есть дифференциал от E_k.
Поскольку $E_k = \frac{Mv^2}{2}$, то $dE_k = d\left(\frac{Mv^2}{2}\right) = \frac{M}{2} \cdot d(v^2) = \frac{M}{2} \cdot 2v\,dv = Mv \cdot$
$\cdot dv$. Имеем: $M \cdot dv = M\frac{dv}{dt} \cdot dt$, но $M\frac{dv}{dt} = F$,
поскольку именно сила F ускоряет элемент dM верёвки кроме того, $v = a \cdot t = \frac{F}{M} \cdot t$.
Здесь мы учли, что каждый элемент верёвки имеет одинаковое по модулю ускорение $a = \frac{F}{M}$, тогда $dE_k = F \cdot dt \cdot \frac{F}{M} \cdot t$ (4).
Подставим (3) и (4) в (2), а также учтём выраж. (1):

$$P \cdot dt = F \cdot dt \cdot \frac{F}{M} \cdot t$$

$$P = \frac{F^2}{M} \cdot t$$

$$P = \frac{(mg)^2}{M} \cdot t \;\Rightarrow\; P = \frac{(30 \cdot 10)^2}{5} \cdot 2 = 36000\,\text{Вт}.$$

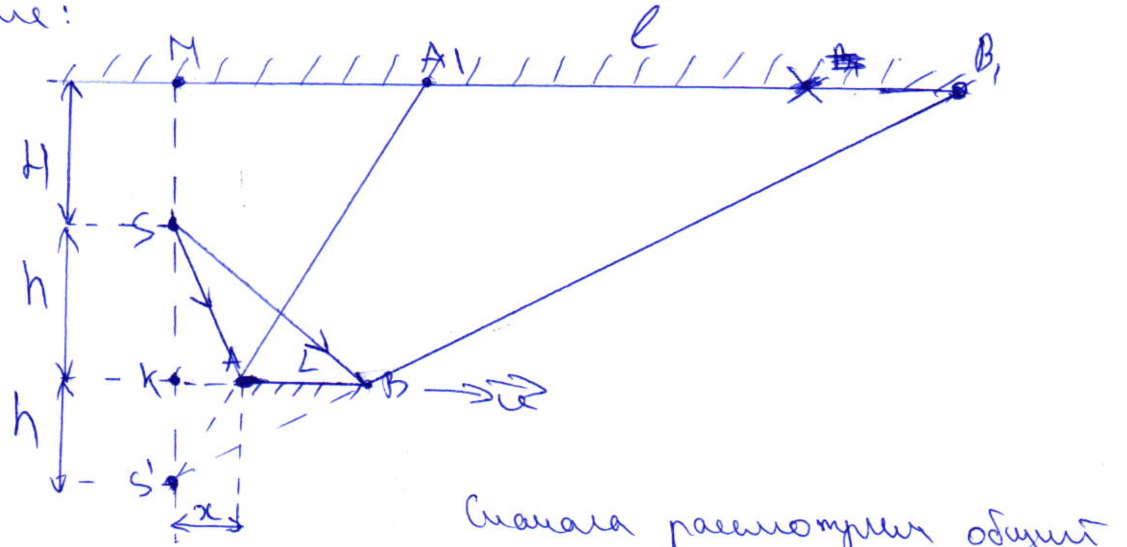
Ответ: 36000 Вт. +

№ 6.

Дано:
$H = 2$ м
$h = 1$ м
$v = 2$ м/с
$SA = 2h$
$t = 5$ с

$\frac{l_2}{l_1}$ - ?

Решение:



Сначала рассмотрим общий случай, когда длина отрезка $KA = x$. Если AB - плоское зеркало, то изображение источника S есть точка S', так что $SK = KS' = h$. A_1B_1 - длина солнечного зайчика на стене. Пусть $AB = L$. Обозначим $A_1B_1 = l$.
Рассмотрим подобные треугольники $AS'AB \sim \Delta S'A_1B_1$

см. след. лист

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр ю100-11-01

(3)

Продолжение № 6...

Составим отношение подобных сторон: $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{S'K}{S'M}$.

Но по усл. задачи, $S'K=h$, $S'M=h+h+H=2h+H$ значит, отношение $\frac{S'K}{S'M}=const$.

Поэтому отношение $\frac{AB}{A_1B_1}$ тоже постоянная величина.

А поскольку $AB=L=const$, то отсюда следует, что размеры солнечного зайчика со временем изменяться не будут: $\frac{\ell_2}{\ell_1}=1$.

Ответ: $\frac{\ell_2}{\ell_1}=1$.

№ 7.

Дано: $U_g-?$

Решение:

Пусть имеется активное сопротивление R, на которое подаётся напряжение $U(t)$, причём и меняется с периодом T. Если U_g – действующее напряжение, то действующая мощность P_g на R определяется формулой $P_g=\frac{U_g^2}{R}$. Тогда за время T выделяется теплота Q, кол-во которой равно $Q=\frac{U_g^2}{R}\cdot T$ (1).

Теперь рассмотрим нашу схему. У нас $T=4t_0$. За это время напряжение меняется четыре раза.

а) При $0\leq t< t_0$ $U(t)=U_1=10B$

б) При $t_0\leq t\leq 2t_0$ $U(t)=U_2=5B$

в) При $2t_0\leq t\leq 3t_0$ $U(t)=U_3=0$

г) При ~~$3t_0$~~ $3t_0\leq t\leq 4t_0$ $U(t)=U_4=-5B$.

Выразим общее кол-во теплоты за время $4t_0$:

$Q=Q_1+Q_2+Q_3+Q_4=\frac{U_1^2}{R}\cdot t_0+\frac{U_2^2}{R}\cdot t_0+\frac{U_3^2}{R}\cdot t_0+\frac{U_4^2}{R}\cdot t_0$ (2)

см. на обратной стороне

Приравняем правые части (1) и (2) учтём, что $T = 4t_0$:

$$\frac{U_g^2}{R} \cdot 4t_0 = \frac{U_1^2}{R} \cdot t_0 + \frac{U_2^2}{R} \cdot t_0 + \frac{U_3^2}{R} \cdot t_0 + \frac{U_4^2}{R} \cdot t_0$$

$$4 \cdot U_g^2 = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2$$

$$U_g = \frac{\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2}}{2} \Rightarrow U_g = \frac{\sqrt{10^2 + 5^2 + 0^2 + (-5)^2}}{2} = \frac{5\sqrt{6}}{2} \text{ В} \approx \underline{6{,}12 \text{ В}}.$$

Ответ: 6,12 В. +

№ 8.

Дано:
$\nu = 2$ моля
$T = 300$ К
V увелич. в 3 раза
40% молекул диссоциировали

$A - ?$

Решение:

Газ 40% молекул диссоциировал на атомы, следовательно, кол-во вещества увеличилось в 1,4 раза:

$$\nu_2 = 1{,}4 \cdot \nu_1 = 2{,}8 \text{ моля}.$$

Процесс-изобарный, следовательно, из уравнения Менделеева-Клапейрона $PV = \nu RT$ следует, что:

$$T_2 = \frac{30}{14} T_1 = \frac{30 \cdot 300}{14} \approx 643 \text{ К}.$$

Работа газа в данном процессе:

$$A = P\Delta V = \nu_2 RT_2 - \nu_1 RT_1 = (2{,}8 \cdot 8{,}31 \cdot 643) - (2 \cdot 8{,}31 \cdot 300) \approx \underline{9975 \text{ Дж}}.$$

Ответ: 9975 Дж. +