Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 73-10-13

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	11	12	13	14	—	—	—	—	50

Вариант 2

№1

Пусть это будут числа $x, x+1, x+2, x+3$, тогда существует 3 разбиения на пары:

1) $x, x+1$; $x+2, x+3$, заметим что $x+1$ и x, также $x+2$ и $x+3$ разной четности $\Rightarrow (x+2)(x+3)-(x+1)\cdot x \,\vdots\, 2 \Rightarrow$ это $\neq 2021$.

2) $x, x+3$; $x+2, x+1$ аналогично в парах числа разной четности $\Rightarrow$

$\Rightarrow x\cdot(x+3)-(x+2)(x+1) \,\vdots\, 2 \Rightarrow \neq 2021$.

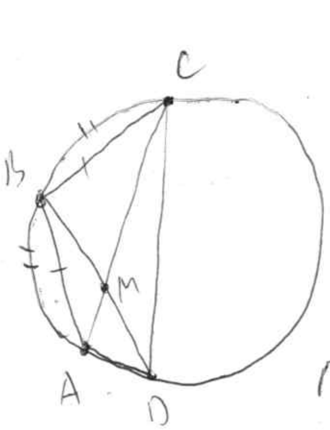
3) $\cancel{x\cdot(x+2)-x}$ $(x+3)(x+1)-(x+2)x = x^2+4x+3-x^2-2x = 2x+3$.

$2x+3=2021$

$x=1009$

Ответ: 1009, 1010, 1011, 1012

№2.



Заметим, что равные хорды стягивают равные дуги $\Rightarrow$ дуги AB и BC равны

$\angle BMC = \dfrac{\smile BC + \smile AD}{2} = \dfrac{\smile AB + \smile AD}{2} = \angle BCD = 45^\circ$

$\angle BMA = 180^\circ - \angle BMC$ (смежные) $\Rightarrow \angle BMA = 135^\circ$

По т. синусов: $\dfrac{AB}{\sin BMA} = 2R$ (R – радиус описанной окр. $\triangle ABM$).

$\dfrac{10}{\sin 135^\circ} = 2\cdot R$

$\dfrac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\cdot R$

$R = \dfrac{10}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $5\sqrt{2}$

№3

~~$\frac{n^3-pn+13}{n^2+pn+2}$~~ $= a$ (a-целое)

$n^3-pn+13 \vdots n^2+pn+2 \Rightarrow n^3+n^2+15 \vdots n^2+pn+2$ (добавили n^2+pn+2 к $n^3-pn+13$).

Заметим если n-четн, то n^3+n^2+15-нечетн, а n^2+pn+2 - четн, а неч ⋮ четн. Если n - нечетн, то n^3+n^2+15 - неч., а n^2+pn+2, при $p \geq 3$-четн а неч ⋮ четн $\Rightarrow p=2$.

Поделим с остатком $n^3-pn+13$ на n^2+pn+2.

$$\begin{array}{l|l} n^3-pn+13 & n^2+pn+2 \\ n^3+pn^2+2n & n-p \\ \hline -pn^2-pn-2n+13 & \\ -pn^2-p^2n-2p & \\ \hline \end{array}$$

$p^2n-pn+2p-2n+13$.

Поскольку $n^3-pn+13 \vdots n^2+pn+2$, то ~~остаток~~ остаток ~~тоже~~ $\vdots n^2+pn+2$.

$p^2n-pn+2p-2n+13 = 4n-2n+2p-2n+13 = 2p+13 = 17$

Значит: $17 \vdots n^2+2n+2 \Rightarrow n^2+2n+2 = \pm 1, \pm 17$.

$n^2+2n+2=1$
$n^2+2n+1=0$
$n_1=-1$

$n^2+2n+2=-1$
$n^2+2n+3=0$
$D=4-12=-8 < 0 \Rightarrow$ целых корней нету.

$n^2+2n+2=17$
$n^2+2n-15=0$
$n_2=-5$ $n_3=3$

$n^2+2n+2=-17$
$n^2+2n+19=0$
$D=4-4\cdot19<0 \Rightarrow$ целых корней нету.

Ответ: $p_1=2, n_1=-1$; $p_2=2, n_2=-5$; $p_3=2, n_3=3$.

№4

Очевидно, что $(4+\sqrt{17})^{2022}+(4-\sqrt{17})^{2022}$ - целое ~~число~~ ведь. Тогда легко заметить что $(4-\sqrt{17})^{2022} < 0,1^{1819} \Rightarrow$ добавив к числу $(4+\sqrt{17})^{2022}$, число меньшее чем $0,1^{1819}$ получили целое $\Rightarrow$ в начале у него идут ≥ 1819 девяток, ведь при сложении к каждому след. числу добавляется макс 1, а у числа $(4-\sqrt{17})^{2022} < 0,1^{1819} \Rightarrow$ у него в начале ≥ 1819 нулей.

5+8